FOLIA 196

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia VII (2015)

Historia matematyki

Piotr Błaszczyk

Nota o *Lehrbuch der Algebra. Einlaitung* Heinricha Webera*

W matematyce greckiej rozwinięto dwie teorie proporcji: wielkości (czyli odcinków, figur, brył, kątów) oraz liczb naturalnych. Euklides skodyfikował proporcję wielkości w Księdze V *Elementów*, a proporcję liczb – w Księdze VII. W Księdze X natomiast rozważał proporcje, w których wstępowały i odcinki, i liczby – nie wyjaśnił jednak, która definicja pozwala na takie rozwiązanie. Kwestia ta jest o tyle ważna, że nie wszystkie twierdzenia Księgi V stosują się do proporcji liczb i faktycznie w przeszłości kilka razy próbowano rozwiązać ten problem, by wymienić arabskie edycje *Elementów*, czy słynną interpretację Księgi X przedstawioną przez Simona Stevina w książce *Arithmétique* (1585).

Do pierwszych dekad XVII wieku antyczne teorie proporcji pełniły w matematyce taką rolę, jaką liczby rzeczywiste i ułamki pełnią współcześnie. Etapem pośrednim między teorią wielkości a współczesną arytmetyką liczb rzeczywistych była arytmetyka odcinków stworzona przez Kartezjusza w *La Géométrie* (1637). Kartezjusz wprowadził mianowicie mnożenie, dzielenie i pierwiastkowanie odcinków, a odpowiednie konstrukcje oparł na proporcji wielkości oraz założeniu, że istnieje odcinek jednostkowy, 1. Posługiwał się przy tym rachunkami, w których łączył odcinki, liczby wymierne oraz pierwiastki z liczb. Można pokazać, że odcinki, $\mathbb{O}$, wraz z kartezjańskimi działaniami tworzą ciało uporządkowane $(\mathbb{O}, +, \cdot, 1, <)$ — dokładniej: część dodatnią ciała uporządkowanego — a ponadto, że w strukturze tej można odtworzyć arytmetykę ułamków[1].

Pierwsze nowożytne definicje liczby były oparte na pojęciu stosunku — tak postępowali między innymi Newton i Euler[2]. Nie były one jasne, gdyż greckie pojęcie stosunku nie było jasne. Okres niepewności co do pojęcia liczby trwał jeszcze do wczesnych lat 70-tych XIX wieku, kiedy to w pracach Charlesa Mèraya (1869), Eduarda Hainego (1872), Georga Cantora (1872) i Richarda Dedekinda (1872) przedstawiono pierwsze konstrukcje liczb rzeczywistych. Pojęcie liczby zyskało ostateczny kształt w roku 1900, kiedy David Hilbert w artykule *Über den Zahlbegriff* przedstawił pierwszą aksjomatykę liczb rzeczywistych[3].

---

*Note on Heinrich Weber's Lehrbuch der Algebra. Einlaitung

[1] Zob. P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Kartezjusz, Geometria. Tłumaczenie i komentarz*, Universitas, Kraków 2015.

[2] Zob. P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Euklides, Elementy, Księgi V–VI. Tłumaczenie i komentarz*, CCPres, Kraków 2013, s. 102–104.

[3] Zob. P. Błaszczyk, *Nota o rozprawie Eduarda Heinego* Elemente der Functionenlehre, Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia VI (2014), 139–152 oraz P. Błaszczyk, *Nota o* Über den Zahlbegriff *Davida Hilberta*, Annales

Heinrich Weber we *Wstępie* do książki *Lehrbuch der Algebra* (1895) połączył antyczne teorie proporcji i na tej podstawie skonstruował ciało liczb rzeczywistych[4]. Za pomocą stosownych definicji rozwiązał problem z Księgi X *Elementów*, podał jasną definicję stosunku, a relację proporcji zastąpił równością stosunków, stwarzając w ten sposób kolejną, obok konstrukcji Mèraya, Heinego, Cantora i Dedekinda, XIX-wieczną konstrukcję liczb rzeczywistych.

Z uwagi na odniesienia historyczne obecne w rozprawie Webera przypomnimy teraz grecką definicję stosunku (*Elementy* V.3) i proporcji (*Elementy*, V.5).

„Stosunek jest pewna relacją w odniesieniu do miary dwóch wielkości tego samego rodzaju".

„Mówi się, że w tym samym stosunku są wielkości pierwsza $[A]$ do drugiej $[B]$ i trzecia $[C]$ do czwartej $[D]$, gdy te same wielokrotności pierwszej $[nA]$ i trzeciej $[nC]$ jednocześnie przekraczają, są jednocześnie równe lub jednocześnie mniejsze od tych samych wielokrotności drugiej $[mB]$ i czwartej $[mD]$, wziętych w odpowiedniej kolejności, zgodnie z dowolnym mnożeniem każda z dwóch każdej z dwóch”[5].

Definicję proporcji można zapisać symbolami w następujący sposób:

$$
\begin{aligned}
A : B :: C : D \Leftrightarrow_{df} (\forall m, n)((&nA >_1 mB \Rightarrow nC >_2 mD) \\
\wedge\, (&nA = mB \Rightarrow nC = mD) \\
\wedge\, (&nA <_1 mB \Rightarrow nC <_2 mD)),
\end{aligned}
$$

przy czym wielkości A, B należą do struktury $\mathfrak{M}_1 = (M_1, +, <_1)$, co znaczy, „są tego samego rodzaju", są na przykład odcinkami, zaś C, D mogą należeć do innej struktury, $\mathfrak{M}_2 = (M_2, +, <_2)$, będąc na przykład trójkątami.

Słowo „stosunek” występuje często w *Elementach*, ale w rekonstrukcji teorii proporcji, gdy odtwarzany jest sens matematyczny kolejnych twierdzeń możne je pominąć. Proporcję zaś można potraktować jak relację czteroargumentową między wielkościami A, B, C, D, lub też jak relację między parami wielkości (A, B), (C, D). Na podstawie definicji V.5 można więc wyznaczać proporcje wielkości bez ustalania, czym jest stosunek.

Niżej pokażemy, że w ujęciu Webera stosunek jest po prostu parę uporządkowaną wielkości, równość stosunków jest modyfikacją definicji V.5, a liczba jest klasą równych stosunków.

1. Liczby naturalne

1. Konstruując liczby rzeczywiste Mèray, Heine, Cantor i Dedekind przyjmowali arytmetykę liczb wymiernych. Współczesne konstrukcje zakładają arytmetykę liczb naturalnych i *via* odpowiednie relacje równoważności tworzą kolejne rozszerzenia zbioru $\mathbb{N}$, czyli $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{R}$. Porządek historyczny konstruowania kolejnych zbiorów był natomiast następujący: w roku 1872 znano już konstrukcje liczb rzeczywistych,

Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticum Mathematicae Pertinentia IV, 2012, 195–198.

[4]Zob. H. Weber, *Lehrbuch der Algebra*, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig 1895; wyd. drugie: 1898.

[5]P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Euklides. Elementy* ..., op.cit, s. 18.

ale pierwszą konstrukcję liczb wymiernych podano dopiero w 1895, w referowanej właśnie pracy Webera[6].

Weber otwiera swój wykład przypomnieniem podstawowych praw arytmetyki liczb naturalnych. Zwracając uwagę na struktury występujące w referowanej pracy zauważmy, że liczby naturalne stanowią tu system

$$(\mathbb{N}, +, \cdot, <),$$

w którym działania mają znane własności (przemienności, łączności i rozdzielności), a porządek liniowy $<$ jest zgodny z dodawaniem i mnożeniem.

Porządek liniowy Weber definiuje jako relację spełniająca prawo trychotomii oraz przechodnią.

„Zbiór nazywa się *uporządkowanym*, gdy spośród jakichkolwiek dwóch różnych jego elementów zawsze jeden z nich uchodzi za większy, i to tak, iż z $a > b$, $b > c$ zawsze wynika $a > c$".

Z uwagi na algorytm Euklidesa, trzeba ponadto przyjąć, że porządek liczb naturalnych charakteryzuje zasada indukcji w następującej wersji: nie istnieje nieskończony malejący ciąg liczb naturalnych;

„[...] ponieważ liczby $a, a_1, a_2, a_3, \dots$ stale się zmniejszają, z konieczności po skończonej liczbie kroków otrzymamy dzielenie bez reszty".

2. Liczby wymierne

2. „Zbiór uporządkowany o tej własności, iż między każdymi dwoma elementami zawsze znajdą się jeszcze inne elementy nazywa się *gęstym*. Zbiór gęsty można utworzyć, gdy zbierze się liczby naturalne w pary i rozważy te pary jako elementy zbioru. Te pary nazywa się ułamkami i oznacza przez $m : n$ lub $\frac{m}{n}$, a dwa takie ułamki $m : n$ oraz $m' : n'$ uważa się za sobie równe, gdy $mn' = nm'$. Jeśli zbierze się wszystkie równe między sobą ułamki w jeden element, to otrzyma się rozmaitość, która jest uporządkowana, gdy ustali się, iż $m : n$ jest większy od $m' : n'$, gdy $mn' > nm'$".

W powyższym fragmencie znajdujemy następujące definicje:

$$m : n \equiv p : q \Leftrightarrow_{df} m \cdot q = n \cdot p, \tag{1}$$

$$m : n \succ p : q \Leftrightarrow_{df} m \cdot q > n \cdot p. \tag{2}$$

Dalej Weber dowodzi, że porządek ułamków jest gęsty.

2.1. Definicję (1) można przedstawić jako interpretację twierdzeń VII.18, 19 z *Elementów*. Stanowią one, że cztery liczby są w proporcji, $m : n :: p : q$, gdy równe są odpowiednie iloczyny, $m \cdot q = n \cdot p$. Weber porzucił niejasną definicję stosunku liczb i zamiast dowodzić twierdzeń VII.18 (jeżeli $m : n :: p : q$, to $m \cdot q = n \cdot p$) oraz VII.19 (jeżeli $m \cdot q = n \cdot p$, to $m : n :: p : q$), połączył ich tezy w definicję.

[6]Pierwszą konstrukcję liczb naturalnych przedstawił Johann von Neumann w artykule *Zur Einführung der trasfiniten Zahlen* (1923).

Definicja (2) z kolei jest interpretacją definicji V.7 *Elementów* określającej porządek stosunków wielkości. Brzmi ona:

„Przy tych samych zaś wielokrotnościach, gdy wielokrotność pierwszej $[lA]$ przekracza wielokrotność drugiej $[kB]$, a wielokrotność trzeciej $[lC]$ nie przekracza wielokrotności czwartej $[kD]$, wtedy mówi się, że pierwsza jest w większym stosunku do drugiej niż trzecia do czwartej".

Definicję Euklidesa można tak zapisać:

$$A : B \succ C : D \Leftrightarrow_{df} (\exists k, l)(lA >_1 kB \wedge lC \leq_2 kD),$$

gdzie A, B, C, D oznaczają wielkości, zaś $lA = \underbrace{A + ... + A}_{l-razy}$ itd. to odpowiednie wielokrotności.

Stosując tę definicję do liczb $m,\ n,\ p,\ q$, otrzymujemy

$$m : n \succ p : q \Leftrightarrow (\exists k, l)(lm > kn \wedge kq \geq lp).$$

Przyjmując dalej $k = p,\ l = q$ dostajemy

$$m : n \succ p : q \Leftrightarrow (qm > pn \wedge pq \geq qp),$$

lub krótko

$$m : n \succ p : q \Leftrightarrow qm > pn.$$

Zbiór ułamków dodatnich będziemy oznaczać dalej tak, jak Weber, literą $\mathfrak{R}$. Definiując dodawaniem przekrojów (zobacz niżej §3) wykorzystuje Weber dodawanie ułamków, liczby wymierne tworzą więc strukturę

$$(\mathfrak{R}, +, \prec).$$

3. Ciągłość

3. W rozważaniach o ciągłości Weber powtarza tezy rozprawy Richarda Dedekinda *Stetigkeit und irrationale Zahlen*[7]. Ciągłość jest zatem cechą porządku liniowego wyrażoną za pomocą przekrojów.

„Podział zbioru uporządkowanego $\mathfrak{M}$ na dwie części A, B tego rodzaju, że każdy element a z A jest mniejszy od każdego elementu b z B będzie nazywany *przekrojem* w $\mathfrak{M}$ i oznaczany, odpowiednio, przez (A, B)".

Definicja ciągłości jest zaś następująca:

„Gdy każdy przekrój w zbiorze gęstym $\mathfrak{M}$ jest wytworzony przez określony element μ, to zbiór ten nazywa się ciągłym".

Porządek zbioru $\mathfrak{M}$ jest więc ciągły, gdy dla każdego przekroju (A, B) zbioru $(\mathfrak{M}, <)$ zachodzi

$$(\exists \mu \in \mathfrak{M})(\forall x \in A)(\forall y \in B)(x \leq \mu \leq y).$$

[7] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig 1872.

Następnie Weber definiuje zbiór wszystkich przekrojów liczb wymiernych:

„Rozmaitość $\mathfrak{R}$ może jednak służyć jako punkt wyjścia do konstrukcji zbioru ciągłego. Ogół wszystkich przekrojów w $\mathfrak{R}$ jest z pewnością rozmaitością, którą można oznaczyć przez $\mathfrak{S}$. Jeśli rozważymy dwa jej różne elementy $\alpha = (A, B)$ oraz $\alpha' = (A', B')$, to albo A będzie częścią A', albo A' częścią A. Jeśli bowiem jakikolwiek element a należy do A, to także każdy mniejszy od niego element z $\mathfrak{R}$ należy do A. Jeśli A jest częścią A', to chcemy nazywać α mniejszym od α', przez co zbiór $\mathfrak{S}$ staje się *uporządkowany*".

Zatem

$$\mathfrak{S} = \{(A, B) : \ (A, B) \text{ jest przekrojem zbioru } (\mathfrak{R}, <)\}.$$

Niech $\alpha, \alpha' \in \mathfrak{S}$, gdzie $\alpha = (A, B), \alpha' = (A', B')$. Porządek w $\mathfrak{S}$ jest więc zadany definicją

$$\alpha < \alpha' \Leftrightarrow_{df} A' \subset A.$$

„Jeśli uznamy przekroje wytworzone przez ułamki wymierne za równe samym tym ułamkom wymiernym i nazwiemy je krótko przekrojami wymiernymi, to zbiór $\mathfrak{S}$ zawiera zbiór $\mathfrak{R}$ i zbiór $\mathfrak{S}$ jest w każdym bądź razie zbiorem gęstym. Zbiór $\mathfrak{S}$ jest jednak także *ciągły*".

Przyjmując utożsamienie liczby wymiernej μ z przekrojem $((-\infty, \mu], (\mu, \infty))$ dostajemy, że $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{S}$.[8] Weber pokazuje, że zbiór $\mathfrak{R}$ jest gęsty w $\mathfrak{S}$ i dowodzi, że porządek przekrojów jest ciągły. Dalej, definiuje dodawania przekrojów:

„Rozumiemy teraz przez sumę $(A, B) + (A', B') = (A'', B'')$ lub $\alpha + \alpha' = \alpha''$ ten przekrój w $\mathfrak{R}$, który otrzymuje się, gdy do A'' skieruje się ułamek wymierny α'' tylko wtedy, gdy istnieje α w A oraz α' w A' o tej własności, że $\alpha'' \leqslant \alpha + \alpha'$. [...] Przekroje wytworzone przez ułamki wymierne μ, μ' dają w wyniku dodawania przekrój wytworzony przez $\mu + \mu'$".

Przekroje dodatniej części osi liczb wymiernych tworzą więc strukturę

$$(\mathfrak{S}, +, <),$$

a przy tym porządek przekrojów jest ciągły.

4. Zbiór mierzalny

4. Pojęcie *zbiór mierzalny* odnosi Weber do struktury algebraiczno-porządkowej $\mathfrak{M} = (M, +, <)$ scharakteryzowanej następującymi aksjomatami: dodawanie jest działaniem wewnętrznym, łącznym i przemiennym, porządek jest liniowy, a ponadto spełnione są następujące zależności:

W1 $(\exists n \in \mathbb{N})(na > b)$,

W2 $(\forall a, b)(\exists c)(a > b \Rightarrow b + c = a)$,

W3 $(\forall a, b)(a + b > a)$, gdzie term na oznacza $\underbrace{a + \cdots + a}_{n-razy}$.

[8] W istocie liczbie μ odpowiadają dwa przekroje: wyżej wskazany oraz $((-\infty, \mu), [\mu, \infty))$.

Można pokazać, że aksjomaty te są równoważne aksjomatom

E1 $(\forall x, y)(\exists n \in \mathbb{N})(nx > y)$,

E2 $(\forall x, y)(\exists z)(x < y \Rightarrow x + z = y)$,

E3 $(\forall x, y, z)(x < y \Rightarrow x + z < y + z)$.

W innym miejscu pokazaliśmy, że aksjomaty E1–E3 charakteryzują Euklidesa pojęcie wielkości[9].

Na podstawie aksjomatów W1–W3 Weber dowodzi kilku istotnych twierdzeń o proporcjach *wielkościach mierzalnych*. W następnym paragrafie zaprezentuje Webera definicje stosunku i proporcji — to najciekawszy fragment referowanej rozprawy. Wcześniej jednak przedstawimy uwagę dotyczącą metodologii.

4.1. Konstruując liczby rzeczywiste Weber rozważa dwa zbiory mierzalne: przekroje $(\mathfrak{S}, +, <)$ oraz stosunki elementów z $\mathfrak{S}$, który oznaczamy symbolem $(\Lambda, \oplus, \prec)$. Obydwa zbiory spełniają warunki W1–W3, dlatego definicje stawiane w dowolnym zbiorze mierzalnym mogą być powtórzone i w $(\mathfrak{S}, +, <)$, i w $(\Lambda, \oplus, \prec)$. Podobnie własności W4–W6 (patrz niżej § 5) wyprowadzane z aksjomatów W1–W3 przysługują i $(\mathfrak{S}, +, <)$, i $(\Lambda, \oplus, \prec)$. Ponadto, porządek obydwu struktur jest ciągły, dlatego własność W7 (patrz niżej § 5) przysługuje i $(\mathfrak{S}, +, <)$, i $(\Lambda, \oplus, \prec)$.

Aksjomatyczna charakterystyka zbioru mierzalnego w istotny sposób skraca więc cały wywód Webera. Wskazany zabieg metodologiczny nie został jednak jasno przedstawiony w rozprawie. Przypomnijmy zatem, że sama idea metody aksjomatycznej została wprowadzona dopiero przez Hilberta w *Über den Zahlbegriff* i wcześniej w pierwszym wydaniu *Grundlagen der Geometrie.*[10]

5. Liczba

5. Prezentowane niżej definicje stosunku i proporcji są stawiane w dowolnym zbiorze mierzalnym $(\mathfrak{M}, +, <)$.

„Przechodzimy teraz do definicji *stosunku* (*Verhältnisse*), który od Starożytności były uważany za podstawę nauki o liczbach, a który najpierw występuje u Euklidesa".

W istocie, za pomocą pojęcia stosunku, Weber podaje nową definicję proporcji.

(a) Stosunki wymierne.

„Załóżmy najpierw, że istnieją dwie liczby całkowite m, n takie, że $na = mb$, jak to np. zawsze ma miejsce, gdy $\mathfrak{M}$ jest systemem liczb naturalnych, lub gdy a, b są dwoma współmiernymi odcinkami; gdy wtedy p, q są innymi liczbami całkowitymi, to $qa = pb$ wtedy i tylko wtedy, gdy $mq = np$. Para liczb p, q jest całkowicie określona poprzez to żądanie, o ile dojdzie jeszcze warunek, iż p, q mają być liczbami względnie pierwszymi. Może być wtedy $m = hp$, $n = hq$, gdzie h jest dowolną liczbą całkowitą. W tym przypadku nazywamy proporcję $a : b$ wymierną

[9]Zob. P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Euklides, Elementy ...*, op. cit, rozdz. 3.

[10]Zob. D. Hilbert, *Über den Zahlbegriff*, op. cit. oraz D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, w: *Festschrift zur Enthüllung des* Gauss-Weber *Denkmals in Göttingen*, Leipzig 1899.

i uważamy ją za równą ułamkowi wymiernemu $m : n$ lub $p : q$. Te ułamki wymierne mogą odtąd być uważane za proporcje liczb całkowitych".

Stosunek wymierny $a : b$ jest więc tak definiowany:

$$a : b = m : n \Leftrightarrow_{df} na = mb. \tag{3}$$

Przy okazji tej i następnych definicji, Weber powołuje się na Księgę V *Elementów*. W istocie definicja (3) to teza twierdzenia X.5.

(b) Porównanie stosunku z ułamkiem.

„Wracamy teraz do jakiejkolwiek rozmaitości mierzalnej $\mathfrak{M}$ i bierzemy z niej jakiekolwiek elementy a oraz b. Jeśli wybierze się, co zawsze jest możliwe, dwie liczby naturalne m, n tak, że $na > mb$, to proporcja $a : b$ jest nazywana większą od proporcji wymiernej $m : n$, lub $\frac{a}{b} > \frac{m}{n}$ [...] Podobnie wynika, że jeśli $n'a < m'b$, to $\frac{a}{b} < \frac{m'}{n'}$".

Mamy zatem:

$$a : b \succ m : n \Leftrightarrow_{df} na > mb, \qquad a : b \prec m : n \Leftrightarrow_{df} na < mb. \tag{4}$$

(c) Porządek i równość stosunków.

„Jeśli teraz $a : b$ oraz $\alpha : \beta$ są dwiema jakimikolwiek proporcjami, które dla zwięzłości chcemy oznaczać przez e, ε, i których elementy należą do tych samych lub różnych rozmaitości, to możliwe są dwa przypadki: 1) Między e oraz ε nie leży żadna proporcja wymierna μ lub 2) istnieje proporcja wymierna między e oraz ε. W przypadku 1) obie proporcje e oraz ε nazywają się *wzajem równymi* [...] W przypadku 2) proporcje e, ε nazywają się *nierównymi*. Może zatem być albo α) $e < \mu < \varepsilon$, albo β) $e > \mu' > \varepsilon$ i oba te przypadki nawzajem się wykluczają, ponieważ z $e < \mu < \varepsilon$, $\varepsilon < \mu'$ wynika, że $\mu < \mu'$, a w konsekwencji dostaje się $e < \mu'$".

Mamy zatem

$$a : b = \alpha : \beta \Leftrightarrow_{df} \neg(\exists\mu)(a : b \succ \mu \succ \alpha : \beta) \wedge \neg(\exists\nu)(a : b \prec \nu \prec \alpha : \beta),$$

gdzie μ, ν są liczbami wymiernymi.

Definicję nierówności stosunków tak zapiszemy

$$a : b \succ \alpha : \beta \Leftrightarrow_{df} (\exists m, n \in \mathbb{N})(na > mb \wedge m\beta > n\alpha). \tag{5}$$

Podobnie,

$$a : b \prec \alpha : \beta \Leftrightarrow_{df} (\exists m, n \in \mathbb{N})(na < mb \wedge m\beta < n\alpha). \tag{6}$$

Teraz można pokazać, że

$$a : b = \alpha : \beta \Leftrightarrow \neg(a : b \succ \alpha : \beta) \wedge \neg(a : b \prec \alpha : \beta). \tag{7}$$

Następnie, na mocy definicji jest:

$$(a : b \prec \alpha : \beta) \vee (a : b = \alpha : \beta) \vee (a : b \succ \alpha : \beta), \tag{8}$$

a ponadto zachodzi dokładnie jeden z tych warunków.

Przechodniość relacji $\prec$ wynika wprost z zależności

$$(m : n \prec a : b \prec p : q) \Rightarrow mq < np. \tag{9}$$

Pojęcie liczby:

„Gdy teraz zbierzemy razem wszystkie równe między sobą stosunki, to otrzymamy pojęcie gatunkowe, które oznaczamy jako *liczbę* w sensie ogólnym. Liczba jest zatem nazwą lub znakiem dla pewnej rozmaitości, której elementami są właśnie te proporcje, której równe są jednej spośród nich. W tym pojęciu liczby są zawarte proporcje wymierne, a w konsekwencji również liczby naturalne, jako proporcje $m : 1$; owe proporcje wymierne tworzą *liczby wymierne*".

Stosując współczesny język powiedzielibyśmy, że liczba jest klasą abstrakcji.

Jakkolwiek Weber relatywizuje pojęcie liczby do „pewnej rozmaitości", to dalej przyjmujemy, że liczby są stosunkami przekrojów. Przyjmujemy zatem, że liczby tworzą zbiór

$$\Lambda = \{a : b \mid a, b \in \mathfrak{S}\}.$$

Na podstawie definicji (5), (6) oraz własności (8), (9) liczby tworzą zbiór uporządkowany liniowo

$$(\Lambda, \prec).$$

Działania na liczbach będę zdefiniowane w oparciu o własności *wielkości mierzalnych.*

6. Dodawanie stosunków

6. Definicje działań poprzedzają cztery twierdzenia: dla dowolnych $a, b \in \mathfrak{M}$ zachodzą następując zależności:

W4 $(\forall a, b, c)(a > b \Rightarrow a : c \succ b : c)$,

W5 $(\forall a, b, c)(b > c \Rightarrow a : c \succ a : b)$,

W6 $\forall a, b, c, d)(a : b = c : d \Rightarrow a : c = b : d)$,

W7 $(\forall a, b, c)(\exists d)(a : b = c : d)$.

Dwa pierwsze odpowiadają twierdzeniu V.8 z *Elementów*, trzecia – twierdzeniu V.16, czwarta natomiast było znana w matematyce greckiej jako założenie o istnienie czwartej proporcjonalnej, współcześnie zaś jest przyjmowana jako aksjomat teorii wielkości[11]. Spójrzmy na dowód W7:

„Twierdzenie jest bezpośrednią konsekwencją założonej ciągłości. Albowiem gdy weźmie się np. element x w $\mathfrak{M}$ z A lub B, odpowiednio do tego, czy $x : b$ jest mniejsze czy większe od $c : d$, to otrzyma się przekrój, który jest wytworzony przez element a taki, że spełniony jest warunek $a : b = c : d$. Twierdzenie to zachodzi jednak również dla pewnych zbiorów nieciągłych, np. dla ułamków wymiernych".

[11] Zob. P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Euklides, Elementy* ..., op. cit., s. 115–117.

Tak więc, gdy dane są trzy przekroje b, c, d należące do $\mathfrak{S}$, to istnieje dokładnie jeden przekrój a, takie że zachodzi $a : b = c : d$. Element a jest wyznaczony przez przekrój (A, B), gdzie

$$A = \{x \in \mathfrak{S} |\ c : d \succ x : b\},\ B = \{x \in \mathfrak{S} |\ x : b \succeq c : d\}.$$

6.1. Przy ustalonym c, na podstawie twierdzenia W7, dla dowolnego stosunku $e : f$ można znaleźć równy mu stosunek $b : c$. Na tej podstawie definiowane jest dodawanie:

$$\frac{a}{c} \oplus \frac{e}{f} =_{df} \frac{a+b}{c}, \quad \text{gdzie } \frac{e}{f} = \frac{b}{c}. \tag{10}$$

„Ta reguła obejmuje, jako szczególny przypadek, dodawanie ułamków wymiernych, a żeby uzasadnić ją w ogólności trzeba potem jeszcze tylko pokazać, że jeśli $a : c = a' : c'$ oraz $b : c = b' : c'$, to musi być również $(a + b) : c = (a' + b')c'$".

Regułę, o której pisze Weber można tak zapisać

(W8) $\quad (a : c = a' : c',\ b : c = b' : c') \Rightarrow (a + b) : c = (a' + b') : c',$

W *Elementach* występuje ona jako twierdzenie V.24.

Dzięki definicji (10) liczby tworzą zbiór mierzalny

$$(\Lambda, \oplus, \prec).$$

„Tym samym dowiedziono zatem, że także liczby, tak, jak je zdefiniowaliśmy, tworzą zbiór mierzalny. Jeśli a oraz c są wzięte z rozmaitości ciągłej, to stosunki $a : c$ tworzą zbiór ciągły, także przy ustalonym c, a ponieważ istnieją w ogóle zbiory ciągłe, więc również liczby tworzą zbiór ciągły".

Ostatnia uwaga oznacza, że skoro porządek w strukturze przekrojów, czyli w $(\mathfrak{S}, +, <)$, jest ciągły, to porządek w strukturze $(\Lambda, \oplus, \prec)$ także jest ciągły.

Do struktury liczb należą stosunki $na : ma$, te zaś są równe ułamkom $m : n$. Mając to na uwadze mówimy, że do struktury $(\Lambda, \oplus, \prec)$ należą ułamki, w szczególności liczby naturalne, które są utożsamiane ze stosunkami $n : 1$.

7. Mnożenie i dzielenie stosunków

7. Zacznijmy od cytatu:

„Jeśli teraz α, β, γ, δ są liczbami, to z proporcji $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ można ustalić dowolną z tych czterech liczb poprzez trzy pozostałe. Jeśli przyjmie się $\delta = 1$, to otrzyma się *mnożenie* $\alpha = \beta\gamma$, a przemienność czynników jest konsekwencją twierdzenia, że $\alpha : \gamma = \beta : \delta$ wynika z $\alpha : \beta = \gamma : \delta$. Jeśli szuka się γ, to otrzymuje się dzielenie; a z podanej wyżej definicji dodawania wynika podstawowa formuła $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$. Cztery sposoby rachowania są zatem wykonalne w dziedzinie liczb, z jedynym ograniczeniem, iż przy odejmowaniu odjemnik musi być mniejszy od odjemnej".

Mamy zatem

$$\alpha = \beta \otimes \gamma \Leftrightarrow_{df} \alpha : \beta = \gamma : 1. \tag{11}$$

Przemienność mnożenia liczb wynika z twierdzenia W6, zachodzi bowiem

$$\alpha : \beta = \gamma : 1 \Leftrightarrow \alpha : \gamma = \beta : 1,$$

stąd

$$\alpha : \gamma = \beta : 1 \Leftrightarrow \alpha = \gamma \otimes \beta.$$

Można pokazać, że zachodzi także rozdzielność mnożenia względem dodawania. Istotnie, na mocy definicji (11) jest

$$(\alpha \otimes \beta) : \alpha = \beta : 1, \quad (\alpha \otimes \gamma) : \alpha = \gamma : 1,$$

a stąd, na podstawie twierdzenia W8,

$$((\alpha \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \gamma)) : \alpha = (\beta \oplus \gamma) : 1,$$

co, znów na mocy definicji (11), daje

$$(\alpha \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \gamma) = \alpha \otimes (\beta \oplus \gamma).$$

Można też pokazać, że iloczyn $\otimes$ jest zgodny z porządkiem, ale tego prawa Weber w ogóle nie wymienia w swojej rozprawie.

7.1. Przyjmijmy, że zachodzi proporcja $\alpha : \beta = \gamma : 1$.

„Jeżeli szukamy liczby γ, dochodzimy do dzielenia":

$$\alpha \div \beta = \gamma \Leftrightarrow_{df} \alpha : \beta = \gamma : 1.$$

Mamy zatem $\alpha : \beta = (\alpha \div \beta) : 1$, czyli $\alpha = \beta \otimes (\alpha \div \beta)$, w szczególności $1 = \beta \otimes (1 \div \beta)$.[12]

8. Liczby ujemne

8. Niech x oznacza każdy element dotąd zdefiniowanego systemu liczbowego, który teraz chcemy określać jako system *liczb dodatnich*. Bierzemy ten system liczbowy po raz drugi i dla odróżnienia, w tym drugim systemie, który określany ma być jako system *liczb ujemnych*, każdy element oznaczamy przez $-x$. Drugi system porządkujemy teraz dokładnie odwrotnie niż pierwszy, tak, że wszędzie, gdzie w pierwszym systemie x występuje jako „większa", w tym drugim ustalamy $-x$ jako „mniejszą", i na odwrót. Dodawanie oraz odejmowanie dla $-x$ są objaśnione podobnie jak dla x, tak, że ma być $(-x)+(-y) = -(x+y)$; $(-x)-(-y) = -(x-y)$.

Pozwalając sobie na uproszczenia, bo w tej części wykład Webera jest zupełnie jasny, przyjmijmy $\mathfrak{L} = -\Lambda \cup \Lambda$, gdzie $-\Lambda = \{-\alpha : \alpha \in \Lambda\}$. Zobaczmy teraz, jak

[12] Czytelnik łatwo znajdzie podobieństwo między Webera definicjami mnożenie i dzielenia stosunków, a definicjami mnożenie i dzielenia odcinków podanymi przez Kartezjusza; zob. P. Błaszczyk, K. Mrówka, *Kartezjusz, Geometria...*, op.cit., s. 157–160.

Weber definiuje liczbę 0. Otóż jeden jedyny przekrój zbioru $(\mathfrak{L}, \prec)$ tworzy lukę, mianowicie $(-\Lambda, \Lambda)$.[13]

„Aby zapewnić tu ciągłość, musimy zatem dodać odpowiadającą przekrojowi $(-x, x)$ jeszcze jedną liczbę o znaku 0, która zdefiniowana jest właśnie przez ów przekrój. Mamy wtedy uporządkowany zbiór ciągły, z obu stron nieograniczony, tj. pełny ciąg liczb rzeczywistych".

W zbiorze $\mathfrak{L}$, za pomocą reguł na znakach, jak np. $x(-y) = (-x)y = -(xy)$, definiuje Weber dodawanie i mnożenie.

„Poglądowo przedstawia się ciąg liczbowy przez punkty, wychodząc od ustalonego i oznaczonego przez 0 punktu prostej i nanosząc liczby dodatnie jako odcinki z jednej, powiedzmy prawej, strony, a liczby ujemne z drugiej (lewej) strony. Obraz sumy dwóch odcinków $z_1 + z_2$ otrzymuje się, gdy począwszy od punktu z_1 naniesie się w prawą lub lewą stronę odcinek o długości $\pm z_2$, w zależności od tego, czy z_2 jest dodatnia czy ujemna".

*

* *

Przedkładane tłumaczenie *Lehrbuch der Algebra. Einleitung* zostało przygotowane przez Profesora Jerzego Pogonowskiego na podstawie pierwszego wydania. W roku 1925 Wydawnictwo Kasy im. Mianowskiego wydało *Podręcznik algebry wyższej* w przekładzie Samuela Dicksteina. *Wstęp* z tej edycji różni się znacząco od tłumaczenia zamieszczonego w niniejszym tomie.

[13] Przyjmując np. przyporządkowanie $\alpha \mapsto (\Lambda, \alpha) =_{df} -\alpha$, można uznać, że $-\Lambda$ jest zbiorem, który *powstaje* ze zbioru Λ na mocy aksjomatu zastępowania. Porządek ze zbioru $(\Lambda, \prec)$ w „naturalny" sposób przedłużany jest na $\mathfrak{L}$.