FOLIA 196

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia VII (2015)

ISSN 2080-9751

Katarzyna Słomczyńska

High School Identities*

Abstract. In 1969, Polish mathematician and logician, Alfred Tarski asked if all the identities true in the set of natural numbers involving the constant 1, addition, multiplication, and exponentiation can be derived from the eleven axioms that are taught at the high school level (*High School Identities*). In 1981 Alex Wilkie negatively solved this problem by constructing an identity that cannot be proved using these axioms. In this paper we survey results connected with Tarski's problem.

Wstęp

Na poziomie szkoły średniej, a nawet w nauczaniu studentów matematyki na wyższych uczelniach, niejasne pozostaje często rozróżnienie pomiędzy teorią (równościową lub pierwszego rzędu) a aksjomatami i modelami tej teorii (Baldwin, 2010). Oczywiście istnieją ważne teorie, w których rozróżnienie to jest zbędne, gdyż teoria jest wyznaczona przez jeden kanoniczny model i opisana przez skończony zbiór aksjomatów. W innych jednak przypadkach z naturalnej zdawałoby się aksjomatyki sformułowanej dla pewnego modelu nie da się wyprowadzić wszystkich twierdzeń prawdziwych w tym modelu. Co więcej, nie da się czasami takiego układu aksjomatów „poprawić” poprzez dopisanie do niego skończonej liczby twierdzeń. Najprostszego przykładu takiej sytuacji dostarcza zbiór liczb naturalnych z działaniami dodawania, mnożenia i potęgowania oraz próba aksjomatyzacji jego teorii przez tzw. *tożsamości szkoły średniej* (*High School Identities*), którą omawiam w tym artykule. Oparty jest on w dużym stopniu na przeglądowych pracach (Burris, Lee 1993); (Burris, Yeats 2004), a także innych podanych w literaturze.

1. High School Identities i problem Tarskiego

Następujące równości dla liczb naturalnych znane są każdemu, kto ukończył szkołę średnią:

*Tożsamości szkoły średniej

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 03C05; Secondary: 03C62

Key words and phrases: HSI-algebras, exponentiation, Wilkie's identity

$$\left.\begin{array}{ll} (T1) & x+y=y+x,\ x+(y+z)=(x+y)+z, \\ (T2) & x\cdot y=y\cdot x,\ x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z,\ x\cdot 1=x, \\ (T3) & x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z, \\ (T4) & x^1=x,\ 1^x=1, \\ (T5) & x^{y+z}=x^y\cdot x^z,\ (x\cdot y)^z=x^z\cdot y^z,\ (x^y)^z=x^{y\cdot z}. \end{array}\right\} \begin{array}{l}\textbf{H}\text{igh}\\ \textbf{S}\text{chool}\\ \textbf{I}\text{dentities}\\ (\textbf{HSI})\end{array}$$

Pojawiły się one w tej postaci już w słynnej monografii Richarda Dedekinda z roku 1888: *Was sind und was sollen die Zahlen?* (Dedekind, 1888). Używając języka algebraicznego można powiedzieć, że algebra $\mathbf{N} := (\mathbb{N}, 1, +, \cdot, \uparrow)$, gdzie $\mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$, z jedną stałą 1 i trzema działaniami binarnymi $+, \cdot, \uparrow$, gdzie $x \uparrow y := x^y$ dla $x, y \in \mathbb{N}$, spełnia te jedenaście równości.

W roku 1969 polski matematyk i logik Alfred Tarski (1901-1983) zadał pytanie, czy z równości (T1)-(T5) można wyprowadzić wszystkie tożsamości dla liczb naturalnych, które zawierają *stałą* 1, *dodawanie*, *mnożenie* i *potęgowanie* (Doner, Tarski, 1969). Pytanie to można inaczej sformułować w następujący sposób:

Problem Tarskiego: *Czy (T1)-(T5) tworzą zupełny układ aksjomatów teorii równościowej dla algebry* $\mathbf{N}$*?*

Wiadomo było, że analogiczne pytanie dla *stałej* 1, *dodawania* i *mnożenia* ma odpowiedź pozytywną. Dokładniej, wiedziano, że identyczności (T1)-(T3) stanowią zupełny układ aksjomatów teorii równościowej dla algebry $\widehat{\mathbf{N}} := (\mathbb{N}, 1, +, \cdot)$ (Henkin, 1977). Ponadto, było też wiadomo, że teoria ta jest *rozstrzygalna*, tj. istnieje algorytm pozwalający zdecydować, czy dana równość, w której występuje tylko stała 1, dodawanie i mnożenie jest prawdziwa w $\widehat{\mathbf{N}}$, czy też nie, poprzez sprowadzenie wyrażeń po obu jej stronach do *postaci normalnej*, którą w tym przypadku jest zwykły wielomian o współczynnikach postaci $\mathbf{k} := 1 + \ldots + 1$ (k - razy), gdzie $k \in \mathbb{N}$.

Tarski dał ten problem do rozwiązania swojemu doktorantowi na uniwersytecie w Berkeley, Charlesowi Martinowi, ale temu udało się osiągnąć tylko częściowe wyniki. Pokazał on mianowicie (Martin, 1973), że problem Tarskiego ma rozwiązanie:

- *pozytywne*, gdy ograniczymy się tylko do potęgowania $(\mathbb{N}, \uparrow)$ lub do potęgowania i mnożenia $(\mathbb{N}, \cdot, \uparrow)$, oraz
- *negatywne*, gdy rozważymy strukturę z trzema działaniami $(\mathbb{N}, +, \cdot, \uparrow)$, ale bez stałej 1.

Nie rozwiązywało to jednak oryginalnego problemu. Kilka lat później wybitny amerykański logik Leon Henkin w swoim artykule (Henkin, 1977), w którym opisywał sytuację dla $\widehat{\mathbf{N}}$, określił problem Tarskiego jako trudny i wciąż nierozwiązany pomimo wysiłku wielu matematyków.

Algebry spełniające równości (T1)-(T5) nazywamy *HSI-algebrami* (*HSI* jest to oczywiście akronim słów *high school identities*). Problem Tarskiego równoważny jest więc pytaniu, czy klasa algebr spełniających te same identyczności co $\mathbf{N}$ pokrywa się z klasą HSI-algebr. Tarski, stawiając problem, wierzył, że odpowiedź na to pytanie jest pozytywna, ale nie umiał podać dowodu. Gdyby jednak ktoś chciał obalić przypuszczenie Tarskiego, musiałby to uzasadnić albo w sposób *syntaktyczny*, tzn. wskazać identyczność prawdziwą w $\mathbf{N}$ i niewyprowadzalną z identyczności (T1)-(T5), albo *semantyczny*, tzn. znaleźć algebrę, która należałaby do rozmaitości HSI, ale nie spełniałaby jakiejś tożsamości prawdziwej w $\mathbf{N}$.

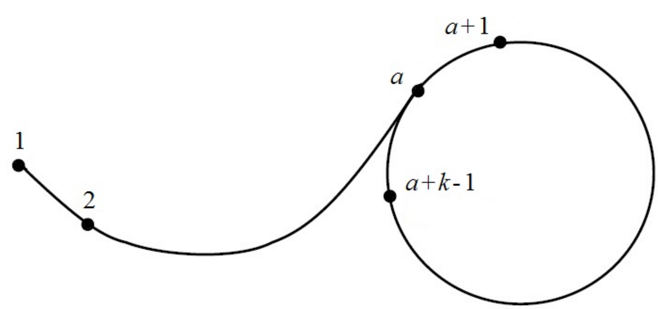
2. Klasa HSI

Klasa HSI zawiera wiele ciekawych algebr. Prosty przykład to $\mathbf{R}^+$: zbiór liczb rzeczywistych dodatnich $\mathbb{R}^+$ ze stałą 1 i naturalnymi działaniami dodawania, potęgowania i mnożenia. Inny, to zbiór potęgowy dowolnego zbioru X z tym zbiorem jako stałą 1 oraz z naturalnymi działaniami mnogościowymi sumy i iloczynu, gdzie potęgowanie określone jest jako rzut na pierwszą współrzędną, tj. $U \uparrow V := U$ dla $U, V \subset X$. Bardziej wyrafinowany przykład (Birkhoff 1942) to algebra skończonych zbiorów częściowo uporządkowanych (rozważanych z dokładnością do izomorfizmu porządkowego) ze zbiorem jednoelementowym jako 1 oraz działaniami sumy rozłącznej, iloczynu kartezjańskiego i odwzorowań zachowujących porządek. Można ponadto pokazać, że istnieje 5 (z dokładnością do izomorfizmu) dwuelementowych *HSI* algebr (Asatryan, 2004), oraz 44 (z dokładnością do izomorfizmu) trójelementowe *HSI* algebry (Burris, Lee, 1993). Inne zasługujące na uwagę HSI-algebry to dwie nieizomorficzne algebry $\mathbf{N}_0(0)$ i $\mathbf{N}_0(1)$, otrzymane jako rozszerzenia $\mathbf{N}$ o element 0, z naturalnymi działaniami, gdzie przyjmujemy, odpowiednio, $0^0 = 0$ dla $\mathbf{N}_0(0)$ i $0^0 = 1$ dla $\mathbf{N}_0(1)$ (Asatryan, 2004).

Ciekawych przykładów skończonych HSI-algebr dostarczają nietrywialne homomorficzne obrazy $\mathbf{N}$. Aby je znaleźć, trzeba najpierw przeanalizować jak wyglądają *kongruencje*, czyli relacje równoważności zgodne z działaniami w $\widehat{\mathbf{N}}$. Stosunkowo łatwo można pokazać, że muszą one mieć postać przystawania $\equiv_{a,k}$, gdzie $a, k \in \mathbb{N}$, w którym „sklejamy" te liczby naturalne, które obie są większe lub równe a i przystają do siebie modulo k, czyli

$$m \equiv_{a,k} n \text{ wtw } m = n \text{ lub } m, n \geq a \text{ i } m \equiv_k n$$

dla $m, n \in \mathbb{N}$. Algebra ilorazowa $\widehat{\mathbf{N}}/\equiv_{a,k}$ ma więc tu postać cyklu o długości k z „ogonem" o długości $a-1$, zob. Ryc. 1.



Ryc. 1. Algebra ilorazowa $\widehat{\mathbf{N}}/\equiv_{a,k}$

Powstaje pytanie: kiedy taka kongruencja w $\widehat{\mathbf{N}}$ jest także kongruencją w $\mathbf{N}$, czyli kiedy zachowuje potęgowanie? Odpowiedział na nie, podając elegancką charakteryzację takich par liczb naturalnych a i k, doktorant Garretta Birkhoffa, John Dyer-Bennet (1940). Udowodnił on mianowicie, że relacja $\equiv_{a,k}$ jest kongruencją w $\mathbf{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są dla każdej liczby pierwszej p i naturalnej m dwa następujące warunki:

1. jeżeli $p^m|k$, to $m \leq a$,
2. jeżeli $p|k$, to $p-1|k$.

Gdy rozważymy teraz szczególny przypadek $a = 1$, relacja $\equiv_{1,k}$ staje się zwykłym przystawaniem liczb naturalnych mod k. Wówczas $\widehat{\mathbf{N}}/\equiv_{1,k}$ posiada element neutralny dla dodawania, którym jest klasa abstrakcji $k/\equiv_{1,k}$, i tworzy pierścień z jedynką w naturalny sposób izomorficzny z $\mathbb{Z}_k$. Stąd natychmiast wnioskujemy, że $\equiv_{1,k}$ będzie kongruencją w $\mathbf{N}$ wtedy i tylko wtedy, gdy *potęgowanie* w $\mathbb{Z}_k$ można zdefiniować w „naturalny" sposób. Jak zaraz pokażemy, działanie takie da się wprowadzić jedynie dla bardzo szczególnych wartości k. Postawienie takiej definicji nie jest możliwe na przykład w $\mathbb{Z}_3$, bo chociaż $1 \equiv 4 \pmod 3$, to $2^1 \equiv 2 \not\equiv 1 \equiv 2^4 \pmod 3$.

To, dla jakich $k \in \mathbb{N}$ konstrukcja taka jest wykonalna, rozstrzyga cytowane wyżej twierdzenie Dyera-Benneta. Z pierwszego warunku wynika wtedy, że w rozkładzie k na czynniki pierwsze każda liczba może występować tylko w pierwszej potędze. Z drugiego zaś warunku wnioskujemy, że jeżeli uporządkujemy te czynniki pierwsze rosnąco, to każdy kolejny musi być równy iloczynowi pewnych mniejszych powiększonemu o 1. Teraz już łatwo można pokazać, że k musi być jedną z pięciu liczb: 1, 2, $6 = 2 \cdot 3$, $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $1806 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43$. Więcej możliwych przypadków już nie ma, gdyż każdy iloczyn czynników pierwszych, na które rozkładamy 1806 powiększony o 1 jest albo jedną z liczb już występujących w ciągu, albo liczbą złożoną, w szczególności $1807 = 13 \times 139$. Tak więc potęgowanie jest możliwe tylko w czterech nietrywialnych pierścieniach cyklicznych: $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{Z}_{42}$ i $\mathbb{Z}_{1806}$!

Oczywiście żadna ze skończonych algebr ilorazowych algebry $\mathbf{N}$ nie może stanowić kontrprzykładu dla hipotezy Tarskiego, gdyż spełniają one wszystkie identyczności, które są prawdziwe w $\mathbf{N}$. Można jednak łatwo pokazać, że każda skończona HSI-algebra musi już zawierać którąś z tych algebr ilorazowych jako podalgebrę generowaną przez 1. Kontrprzykładu takiego można więc szukać rozszerzając taką algebrę ilorazową do większej, nie spełniającej już wszystkich identyczności prawdziwych w $\mathbf{N}$.

3. Kontrprzykład Wilkiego

Problem Tarskiego został rozwiązany w zaskakująco prosty sposób przez Alexa Wilkiego z Uniwersytetu w Oxfordzie (Wilkie, 1981). Podał on przykład tożsamości, która jest prawdziwa dla liczb naturalnych, a której nie da się wyprowadzić z High School Identities. Ciekawe, że preprint Wilkiego został opublikowany dopiero w roku 2000. *Tożsamość Wilkiego* ma postać równości dwóch iloczynów, w których wielomiany zależne od jednej zmiennej x podnoszone są do potęg x i y, raz w jednej, a raz w drugiej kolejności:

$$(A^x + B^x)^y (C^y + D^y)^x = (A^y + B^y)^x (C^x + D^x)^y, \qquad (W)$$

gdzie

$$\begin{aligned} A &:= x + 1, \\ B &:= x^2 + x + 1, \\ C &:= x^3 + 1, \\ D &:= x^4 + x^2 + 1. \end{aligned}$$

Tożsamość Wilkiego stanowiła sprytną modyfikację tożsamości zaproponowanej przez Martina w jego doktoracie (Martin, 1973), która jest prawdziwa w algebrze liczb naturalnych z dodawaniem, mnożeniem i potęgowaniem, ale bez jedynki, i której nie da się wyprowadzić z równości (T1)-(T3) i (T5) (ale da się ją wywieść z równości (T1)-(T5), jeżeli 1 w języku uwzględnimy!):

$$(x^y + x^y)^x (y^x + y^x)^y = (x^x + x^x)^y (y^y + y^y)^x .$$

Dlaczego tożsamość Wilkiego prawdziwa jest w $\mathbf{N}$, to znaczy $\mathbf{N} \models W$? Aby to zobaczyć, zauważmy, że w rozkładzie wielomianów C i D pojawia się ten sam czynnik $F := x^2 - x + 1$. Dokładniej, mamy $C = A \cdot F$ i $D = B \cdot F$, a stąd dla wszystkich rzeczywistych dodatnich liczb x i y (a więc w szczególności dla wszystkich liczb naturalnych) zachodzi:

$$\begin{aligned} (A^x + B^x)^y (C^y + D^y)^x &= (A^x + B^x)^y (A^y + B^y)^x F^{yx} \\ &= (A^x + B^x)^y F^{xy} (A^y + B^y)^x \\ &= (C^x + D^x)^y (A^y + B^y)^x . \end{aligned}$$

Dlaczego natomiast tożsamości Wilkiego nie da się wyprowadzić z HSI? Istotnym powodem jest to, że w powyższym dowodzie wykorzystaliśmy wyrażenie F, które chociaż przyjmuje wyłącznie wartości naturalne dla $x \in \mathbb{N}$, to nie jest termem w języku algebry $\mathbf{N}$, czyli nie można go zapisać używając tylko stałej 1, dodawania, mnożenia i potęgowania, gdyż występuje w nim składnik ujemny. Oczywiście, nie oznacza to, że nie mógłby *a priori* istnieć inny dowód tej tożsamości, korzystający wyłącznie z aksjomatów HSI. Wilkie podał dowód syntaktyczny, że $HSI \nvDash W$, przeprowadzając go nie wprost – indukcją na długość ewentualnego takiego wyprowadzenia (Wilkie, 1981).

Pierwszy dowód semantyczny tego faktu zaproponował Yuri Gurevič (1985) konstruując 59-elementową HSI-algebrę, która nie spełnia tożsamości W. Później podawano coraz to mniejsze przykłady takich algebr. Ostatecznie Stanley Burris i Karen Yeats (2004) skonstruowali taką algebrę o 12 elementach, a rok później Jian Zhang (2005) pokazał, że najmniejsza HSI-algebra nie spełniająca W musi mieć co najmniej 11 elementów. Do dziś jednak nie wiadomo, czy taka HSI-algebra istnieje.

Otwarte pozostaje też pytanie: jaka jest najmniejsza HSI-algebra, która nie spełnia *jakiejś* tożsamości prawdziwej w $\mathbf{N}$ (takie tożsamości nazywa się czasem *egzotycznymi*)? Wiadomo jedynie, że musi ona liczyć co najmniej 3 elementy, gdyż, jak wspominaliśmy już, istnieje tylko 5 nieizomorficznych dwuelementowych HSI-algebr i okazuje się, że każda z nich spełnia wszystkie identyczności $\mathbf{N}$, więc nie mogą one stanowić kontrprzykładu dla hipotezy Tarskiego (Asatryan, 2004).

4. Skończona aksjomatyzowalność i rozstrzygalność teorii równościowej dla $\mathbf{N}$

Negatywne rozstrzygnięcie przez Wilkiego hipotezy Tarskiego sprawiło, że aktualne stało się pytanie o to, czy można zaksjomatyzować teorię równościową dla $\mathbf{N}$, dodając do jedenastu identyczności (T1)-(T5) jakiś skończony zbiór aksjomatów. Pytano więc, czy zbiór wszystkich identyczności prawdziwych w algebrze $\mathbf{N}$, który będziemy oznaczać dalej przez $Th\,(\mathbf{N})$, jest *skończenie aksjomatyzowalny*. Negatywnej odpowiedzi na to pytanie udzielił Gurevič (1990), który udowodnił, że teoria równościowa dla $\mathbf{N}$ nie jest skończenie aksjomatyzowalna. Wskazał on w tym celu nieskończony ciąg identyczności $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prawdziwych w $\mathbf{N}$ i podobnych w formie do W, ale zawierających tylko jedną zmienną, i pokazał, że z każdego skończonego zbioru identyczności dla $\mathbf{N}$ nie da się wyprowadzić przynajmniej jednej z nich. Identyczność W_1 uzyskuje się, wstawiając w identyczności Wilkiego $\mathbf{2}^x$ za y. Ogólnie ciąg ten ma następującą postać:

$$(A_n^x + B_n^x)^{\mathbf{2}^x}\left(C_n^{\mathbf{2}^x} + D_n^{\mathbf{2}^x}\right)^x = \left(A_n^{\mathbf{2}^x} + B_n^{\mathbf{2}^x}\right)^x (C_n^x + D_n^x)^{\mathbf{2}^x}, \qquad (W_n)$$

gdzie dla $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} A_n &:= x + 1,\\ B_n &:= x^{\mathbf{2}n} + \ldots + x + 1,\\ C_n &:= x^{\mathbf{2}n+1} + 1,\\ D_n &:= x^{\mathbf{4}n} + \ldots + x^{\mathbf{2}} + 1. \end{aligned}$$

Chociaż algebry $\mathbf{N}$ nie da się opisać za pomocą skończonego zbioru aksjomatów, można pokazać, że teoria równościowa dla $\mathbf{N}$ jest *rozstrzygalna*, to jest istnieje algorytm (efektywna procedura), który rozstrzyga, czy dana formuła jest spełniona w $\mathbf{N}$ czy nie. Pierwszym krokiem dla pokazania tego wyniku było udowodnienie przez Martina (1973) rezultatu, stwierdzającego, że dokładnie te same tożsamości, które są prawdziwe w algebrze liczb rzeczywistych dodatnich z dodawaniem, mnożeniem, potęgowaniem i stałą 1, są też prawdziwe w $\mathbf{N}$, czyli że $Th\,(\mathbf{N}) = Th\,(\mathbf{R}^+)$.

Dowód Martina opierał się na następującym pomyśle z pracy (Hardy, 1910). Rozważamy zbiór $\mathcal{H}$ złożony z wszystkich funkcji prowadzących z $\mathbb{R}^+$ w $\mathbb{R}^+$, zdefiniowanych za pomocą stałych dodatnich, dodawania, mnożenia i potęgowania. W zbiorze tym definiujemy relację $\prec$ polegającą na tym, że jedna funkcja jest, począwszy od pewnego miejsca, silnie większa od drugiej. Okazuje się, że dla każdych dwóch różnych funkcji $f, g \in \mathcal{H}$, zachodzi albo $f \prec g$, albo $g \prec f$ (Hardy, 1910, Burris, Yeats, 2004). Innymi słowy wykresy dwóch takich funkcji nie mogą nieskończenie wiele razy się przecinać. Każdemu termowi jednej zmiennej wyrażonemu w języku $\mathbf{N}$ da się przypisać w naturalny sposób funkcję z $\mathcal{H}$. Zatem, jeżeli równość takich dwóch termów jest nieprawdziwa w algebrze $\mathbf{R}^+$, to odpowiadające im funkcje różnią się dla dostatecznie dużych argumentów, a więc i dla pewnej liczby naturalnej. Stąd równość tych dwóch termów jest fałszywa także w $\mathbf{N}$. Sytuację, gdy termy zależą od większej liczby zmiennych, sprowadza się łatwo do przypadku jednej zmiennej za pomocą indukcji na ich liczbę.

Ostatecznie problem rozstrzygalności teorii równościowej dla $\mathbf{N}$ redukuje się więc do problemu rozstrzygalności dla $\mathbf{R}^+$, który Macintyre (1981), a kilka lat później niezależnie Gurevič (1985), rozwiązali stosując zaawansowane metody analizy matematycznej.

Literatura

Asatryan, G. R.: 2004, A solution to identities problem in 2-element HSI-algebras, *Math. Log. Quart.* **50**, 175-178.

Baldwin, J. T.: 2010, Logic across the high school curriculum, *preprint*, University of Illinois at Chicago. `http://homepages.math.uic.edu/~jbaldwin/pub/logicaug20.pdf` [dostęp: 2016-01-29].

Birkhoff, G.: 1942, Generalized arithmetic, *Duke Math. J.* **9**, 283-302.

Burris, S., Lee, S.: 1993, Tarski's High School Identities, *Amer. Math. Monthly* **100**, 231-236.

Burris, S., Yeats, K. A.: 2004, The saga of the High School Identities, *Algebra Universalis* **52**, 325-342.

Dedekind, R.: 1888, *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Verlag Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig. [tłum. ang.: 1995, *What are numbers and what should they be?* Revised, edited, and translated from the German by H. Pogorzelski, W. Ryan and W. Snyder. RIM Monographs in Mathematics. Research Institute for Mathematics, Orono, ME].

Doner, J., Tarski, A.: 1969, An extended arithmetic of ordinal numbers, *Fund. Math.* **65**, 95-127.

Dyer-Bennet, J.: 1940, A theorem on partitions of the set of positive integers, *Amer. Math. Monthly* **47**, 152-154.

Gurevič, R.: 1985, Equational theory of positive numbers with exponentiation, *Proc. Amer. Math. Soc.* **94**, 135-141.

Gurevič, R.: 1990, Equational theory of positive numbers with exponentiation is not finitely axiomatizable, *Ann. Pure Appl. Logic* **49**, 1-30.

Hardy, G. H.: 1910, *Orders of Infinity. The 'Infinitärcalcül' of Paul Du Bois-Reymond*, Cambridge University Press, Cambridge.

Henkin, L.: 1977, The logic of equality, *Amer. Math. Monthly* **84**, 597-612.

Macintyre, A.: 1981, The laws of exponentiation, w: C. Berline, K. McAloon, J.-P. Ressayre (red.), *Model Theory and Arithmetic*, Lecture Notes in Math. **890**, Springer, Berlin, 185-197.

Martin, C. F.: 1973, *Equational Theories of Natural Numbers and Transfinite Ordinals*, Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley, CA.

Wilkie, A. J.: 1981, On exponentiation - a solution to Tarski's high school algebra problem, *preprint*, Oxford University, 2000, w: A. Macintyre (red.), *Connections between Model Theory and Algebraic and Analytic Geometry*, Quaderni di Matematica **6**, Naples, 107-129. `http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.15.9695&rep=rep1&type=pdf` [dostęp: 2016-01-29].

Zhang, J.: 2005, Computer search for counterexamples to Wilkie's Identity, w: R. Nieuwenhuis (red.), *Automated Deduction – CADE-20*, Lecture Notes in Computer Science **3632**, Springer, Berlin, 441-451.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail kslomcz@up.krakow.pl