FOLIA 231

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 9(2017)

ISSN 2080-9751
DOI 10.24917/20809751.9.11

*Bernard Bolzano*

# Czysto-analityczny dowód twierdzenia, że między każdymi dwoma wartościami, które dają wyniki przeciwnych znaków, leży jakiś rzeczywisty pierwiastek równania*

autorstwa Bernarda Bolzano
kapłana diecezjalnego, doktora filozofii, profesora religioznawstwa,
członka Towarzystwa Nauk w Pradze
Dla rozpraw Towarzystwa Nauk
Praga 1817**

## Przedmowa

W teorii równań są dwa twierdzenia, których dowody jeszcze do niedawna były nieznane. Pierwsze to twierdzenie, że między dwoma wartościami [Werthen] nieznanej wielkości [Größe], które dają wyniki przeciwnych znaków, zawsze leży jakiś rzeczywisty [reelle] pierwiastek równania[1]. Drugie to, że każdą algebraiczną wymierną funkcję całkowitą zmiennej wielkości można rozłożyć na czynniki rzeczywiste pierwszego lub drugiego stopnia[2].

Po kilku nieudanych próbach d'Alemberta, Eulera, de Foncenexa, Lagrange'a, Laplace'a, Klügela i innych, w ubiegłym roku Gauss podał dwa niemal w pełni zadowalające dowody drugiego twierdzenia. Istotnie, ten wybitny uczony przedstawił dowód tego twierdzenia już w 1799 roku[i], ale – jak przyznał – był on wadliwy, gdyż czysto analityczne prawdy opierały się na rozważaniach geometrycznych. Jego dwa ostatnie dowody[ii] nie mają już tej wady, gdyż występujące w nich funkcje trygonometryczne można, a nawet należy, traktować czysto analitycznie.

Chociaż pierwsze ze wspomnianych wyżej twierdzeń nie zaprzątało myśli badaczy w jakiś szczególny sposób, to można wskazać uznanych matematyków, którzy się nim zajmowali. Próbowano różnych dowodów. Łatwo się o tym przekonać,

*Purely Analytical Proof of a Claim, that Between Each Two Values Resulting in Opposite Signs, There is a Real Equation Element

**Przypisy dolne pochodzą od Bolzano, końcowe – od tłumacza.

[i] *Demonstratio nova Theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*, Helmstadii, 1799.

[ii] W *Demonstratio nova altera etc.*, oraz *Demonstratio nova tertia*; oba z roku 1816.

porównując działania podejmowane przez Kästnera[iii], Clairaut'a[iv], Lacroix[v], Metternicha[vi], Klügela[vii], Lagrange'a[viii], Röslinga[ix] i wielu innych. Dokładniejsze badanie pokazuje jednak, że żaden z tych dowodów nie jest poprawny.

I. Najbardziej rozpowszechniona wersja dowodu opiera się na prawdzie zaczerpniętej z geometrii, że każda linia ciągła [kontinuierliche Linie] o zwykłej krzywiźnie, której rzędne są najpierw dodatnie, a później ujemne (lub odwrotnie), musi koniecznie przeciąć oś odciętych w punkcie leżącym między tymi rzędnymi[3]. Wówczas, istotnie, nie ma wątpliwości co do poprawności czy oczywistości tego geometrycznego twierdzenia. Ale równie oczywiste jest i to, że nie należy łamać zasady, iż prawd matematyki czystej czy ogólnej, to jest arytmetyki, algebry, analizy, nie należy wyprowadzać z rozważań, które należą jedynie do matematyki stosowanej lub specjalnej, czyli geometrii. Czyż nie jest tak, że od dawna czuliśmy i przyjmowaliśmy, że niewłaściwe jest μεταβασις εις αλλο γενος?[4].

Czyż nie odkryto stu innych przypadków, w których tego unikano, przypisując zarazem dużą wagę temu unikaniu?[x] Czyż więc, gdy chcemy być konsekwentni, nie musimy postąpić tak samo i tutaj? Istotnie, kto sądzi, że dowody naukowe nie są bynajmniej zwykłymi potwierdzeniami, lecz raczej uzasadnieniami, tj. przedstawieniami obiektywnych podstaw prawd, które powinny być udowodnione, ten jasno widzi, że prawdziwie naukowe dowody (lub obiektywne podstawy prawd), które stosują się do wszystkich wielkości, zarówno tych w przestrzeni, jak i innych, nie mogą wynikać z prawd, które stosują się jedynie do wielkości w przestrzeni[5]. Przeciwnie, przyjmując ten punkt widzenia, zauważamy, że dowody geometryczne takie jak ten, są w wielu przypadkach błędnym kołem.

Bo chociaż prawda geometryczna, o której tu mowa, jest – jak już wiadomo – oczywista i nie potrzebuje dowodu w sensie potwierdzenia, to jednak potrzebuje uzasadnienia. Łatwo widać, że jej pojęcia składowe są tak powiązane, iż bez wahania powiemy, że nie może ona być jedną z tych prawd prostych, które nazywamy prawdami podstawowymi czy aksjomatami, ponieważ stanowią one podstawę innych prawd, a same nie wynikają z innych[6]. Wręcz przeciwnie, jest to twierdzenie czy prawda wynikająca, czyli taka, która musi być wyprowadzona z innych prawd, bo ma podstawę w pewnych innych prawdach[xi].

Rozważmy teraz obiektywną podstawę, dla której linia w wyżej wymienionych okolicznościach przecina oś odciętych. Każdy zapewne łatwo przyzna, że podstawa tego leży nie gdzie indziej, jak w ogólnej prawdzie, że każda funkcja ciągła [stetige Funktion], która jest dodatnia dla jednej wartości $x$ i ujemna dla drugiej, musi być zerem dla pewnej wartości pośredniej $x$. Ale to jest właśnie ta prawda, która ma być tu udowodniona. Dlatego nie można pozwolić, by została ona wyprowadzona

[iii] *Podstawy analizy wielkości skończonych*, wydanie 3, §316.
[iv] *Eléments d'algébre*, wydanie 5, suplement, rozdział I, nr 16.
[v] *Éléments d'algèbre*, wydanie 7.
[vi] W swoim tłumaczeniu powyższej pracy Lacroix, Mainz 1811, §211.
[vii] W swoim *Słowniku matematycznym* 2, §447.
[viii] *Traité de la resolution des équations numeriques de tous les degrés*, Paryż 1808.
[ix] *Podstawowe postaci, różnice. Różniczki i całki funkcji*, część I, §49.
[x] Przykładem są wcześniej cytowane prace pana Gaussa.
[xi] Porównaj *Przyczynek do uzasadnionego przedstawienia matematyki*, wydanie pierwsze, Praga 1810, §§2, 10, 20, 21, w których można znaleźć rozwinięcie zasad logicznych, które tu są używane i zakładane jako znane.

z pierwszej (jak w dowodzie, który teraz rozważamy). Raczej odwrotnie, pierwsza musi wynikać z drugiej jeśli chcemy reprezentować prawdy naukowe w taki sam sposób, w jaki są one ze sobą obiektywnie połączone[7].

II. Nie mniej naganne są dowody, które wyprowadzane są z pojęcia ciągłości funkcji z użyciem koncepcji czasu i ruchu. „Jeżeli dwie funkcje $fx$ i $\varphi x$ zmieniają się zgodnie z prawem ciągłości i gdy dla $x = \alpha$, $f\alpha < \varphi\alpha$, ale $f\beta > \varphi\beta$, dla $x = \beta$, to między $\alpha$ i $\beta$ musi leżeć jakaś wartość $u$, dla której zachodzi $fu = \varphi u$. Jeśli bowiem wyobrazimy sobie, że wielkość zmienna $x$ obu tych funkcji stopniowo przyjmuje wszystkie wartości między $\alpha$ i $\beta$, i to w tym samym momencie zawsze te same wartości, to na początku tej ciągłej zmiany $x$ jest $fx < \varphi x$, zaś na końcu $fx > \varphi x$. Ale ponieważ obie te funkcje, z uwagi na swoją ciągłość, muszą najpierw przejść przez wszystkie wartości pośrednie zanim przyjmą większą wartość, to musi być jakiś pośredni moment, w którym będą sobie równe". Jest to dalej ilustrowane przykładem ruchu dwóch ciał, z których jedno najpierw jest za drugim, a następnie przed nim. Stąd ma wynikać, że w pewnym momencie będą one musiały się minąć.

Nikt nie zaprzeczy, że pojęcia czasu i ruchu są tak samo obce ogólnej matematyce jak pojęcie przestrzeni. Nie mamy nic przeciwko tym dwóm pojęciom, o ile zostały tu wprowadzone jedynie w celu wyjaśnienia.

Ponieważ w żadnym razie nie jesteśmy zwolennikami przesadnego puryzmu, który – w celu utrzymania nauki wolnej od wszystkiego, co obce – wymaga, by w wykładzie nigdy nie używać wyrażeń zapożyczonych z innych dziedzin, nawet w sensie metaforycznym i w celu opisania faktów krócej i wyraźniej niż można to osiągnąć opisem z użyciem technicznych terminów; ani nawet tylko w celu uniknięcia powtarzania tego samego słowa, albo w taki sposób, by – przez nadanie nazwy – zapamiętać przykład, który będzie służył potwierdzeniu tezy. Można zatem zauważyć, że nie uważamy przykładów i zastosowań za skazę na doskonałej formie wykładu naukowego. Z drugiej strony jednak, stanowczo żądamy, by przykłady nigdy nie zastępowały dowodów i by istota wnioskowania nigdy nie była oparta na metaforycznym wykorzystaniu zwrotów i powiązanych z nimi wyobrażeń tak, że ostatni wniosek zniknie, gdy one same zostaną zmienione.

Zgodnie z tymi zasadami użycie pojęcia czasu w powyższym dowodzie nadal może być usprawiedliwione, bo wniosek nie opiera się na wyrażeniach, które pochodzą od pojęcia czasu, ale może być przyjęty bez nich. Ostatnia ilustracja wykorzystująca ruch ciała w żaden sposób nie może być postrzegana jako coś więcej niż tylko zwykły przykład, który sam w sobie nie dowodzi twierdzenia, a raczej służy tylko temu, by twierdzenie zostało udowodnione.

a) Pomińmy ten przykład i zbadajmy resztę rozumowania. Zauważmy przede wszystkim, że u jego podstaw leży błędna koncepcja ciągłości. Według właściwej definicji wyrażenie, że *funkcja $fx$ zmienia się zgodnie z prawem ciągłości dla wszystkich wartości $x$ wewnątrz lub na zewnątrz pewnych granic*[xii] *oznacza po prostu, że jeżeli $x$ jest jakąś wartością, to różnica $f(x+\omega) - fx$ może stać się mniejsza niż każda dana wielkość pod warunkiem, że $\omega$ może być dowolnie mała.*

---

[xii] Są to funkcje, które dla wszystkich wartości ich pierwiastków zmieniają się w sposób ciągły, np. $ax + bx$. Ale są też inne, które tylko wewnątrz lub na zewnątrz pewnych wartości granicznych ich pierwiastków zmieniają się zgodnie z prawem ciągłości. Zatem zmiany funkcji $x + \sqrt{(1-x)(2-x)}$ rosną tylko dla tych wszystkich wartości $x$, które są $< +1$ lub $> +2$, ale nie dla wartości, które leżą między $+1$ a $+2$.

Czyli $f(x+\omega) = fx + \Omega$ (zgodnie z oznaczeniami przyjętymi w §14. *Twierdzenia dwumianowego* itd., Praga 1816). Ale, jak zakłada się w tym dowodzie, funkcja ciągła to taka, która nigdy nie osiągnie większej wartości bez uprzedniego przejścia przez wszystkie wartości pośrednie, tj. $f(x + n \vartriangle x)$ może przyjąć każdą wartość między $fx$ i $f(x+ \vartriangle x)$, gdy $n$ przyjmuje wartości między 0 i +1. Jest to z pewnością prawdziwe twierdzenie, ale nie może być ono postrzegane jako wyjaśnienie pojęcia ciągłości. Jest to raczej twierdzenie o ciągłości, które można udowodnić tylko przy założeniu dowodzonej tezy. Bo jeżeli $M$ jest jakąś wielkością między $fx$ a $f(x+ \vartriangle x)$, to twierdzenie, że istnieje wartość $n$ między 0 a +1, dla której $f(x + n \vartriangle x) = M$ jest tylko szczególnym przypadkiem ogólnej prawdy, że jeżeli $fx < \varphi x$ i $f(x+ \vartriangle x) > \varphi(x+ \vartriangle x)$, to musi istnieć wartość pośrednia $x+n \vartriangle x$, dla której $f(x+n \vartriangle x) = \varphi(x+n \vartriangle x)$. Ta ogólna prawda daje pierwsze twierdzenie w przypadku, gdy funkcja $\varphi x$ przyjmuje stałą wartość $M$.

b) Ale nawet, gdyby można było udowodnić to twierdzenie w inny sposób, to dowód, który badamy miałby inny błąd. Z faktu, że $f\alpha > \varphi\alpha$ i $f\beta < \varphi\beta$ wynikałoby, że tylko wtedy, gdy $u$ przyjmuje niektóre wartości między $\alpha$ i $\beta$, dla których $\varphi u > \varphi\alpha$, ale $< \varphi\beta$, to $fx$ także będzie $= \varphi u$ przy przejściu od $f\alpha$ do $f\beta$, tj. dla pewnego $x$ między $\alpha$ i $\beta$. Ale czy to zachodzi dla tej samej wartości $x$, która jest $= u$ (bo $u$ może być dowolną wartością między $\alpha$ i $\beta$, która daje $\varphi u > \varphi\alpha$ i $< \varphi\beta$), tj. czy istnieje jakaś wartość $x$ leżąca między $\alpha$ i $\beta$, dla której obie funkcje $fx$ i $\varphi x$ będą równe między sobą, to jeszcze nie wynika.

c) Zwodniczość całego dowodu polega przede wszystkim na włączeniu do niego pojęcia czasu. Jeśli je pominąć, to od razu widać, że dowód byłby niczym innym, jak tylko powtórzeniem w innych słowach dowodzonego twierdzenia. Stwierdzamy zatem, że funkcja $fx$ przechodząc od stanu mniejszego do większego, musi najpierw osiągnąć stan równy $\varphi x$, tj. bez pojęcia czasu, że wśród wartości jakie przyjmuje $fx$ jest zawsze jedno takie $x$ między $\alpha$ i $\beta$, które daje $fx = \varphi x$, co jest dokładnie twierdzeniem, które należy udowodnić.

III. Inne przykłady naszego twierdzenia podane są zupełnie bez dowodu i poparte jedynie pewnymi przykładami z geometrii lub bazują na następującym stwierdzeniu: „Każda zmienna wielkość może przejść ze stanu dodatniego do ujemnego przez stan zero lub nieskończoność”. Skoro rozwiązanie równania nie może stać się nieskończenie duże dla żadnej skończonej wartości pierwiastka, więc trzeba dojść do wniosku, że przejście musi nastąpić przez zero.

a) Jeżeli oddzielimy od powyższego twierdzenia niewłaściwą ideę przejścia, która obejmuje zmiany w czasie i przestrzeni, omijając tym samym absurdalny wyraz stanu niebytu, to w końcu otrzymamy następujące twierdzenie: „Jeżeli zmienna wielkość, która zależy od zmiennej $x$ jest dodatnia dla $x = \alpha$ i ujemna dla $x = \beta$, to zawsze istnieje wartość $x$ leżąca między $\alpha$ i $\beta$, dla której osiągana jest wielkość zero lub nieskończoność”[8]. Teraz każdy z pewnością zauważy, że takie twierdzenie nie jest aksjomatem, lecz musi być udowodnione, chociaż jego dowód mógłby być trochę łatwiejszy od dowodu twierdzenia wyjściowego.

b) Rzeczywiście, dokładniejsze badania pokazują, że twierdzenie to jest zasadniczo identyczne z twierdzeniem wyjściowym. Ale nie można zapominać, że twierdzenie to jest prawdziwe tylko wtedy, gdy odnosi się do wielkości, które różnią się w sposób ciągły. Zatem na przykład funkcja $x + \sqrt{(x-2)(x+1)}$ jest dodatnia dla $x = +2$ i ujemna dla $x = -1$, niemniej jednak, ponieważ wewnątrz tych granic nie zmienia się zgodnie z prawem ciągłości, to nie ma wartości $x$ leżącej wewnątrz $+2$ i $-1$, dla której funkcja przyjmuje wartość zero lub nieskończoność. Jednakże jeśli ograniczymy twierdzenie do wielkości, które różnią się w sposób ciągły, musimy również wykluczyć te funkcje, które stają się nieskończone dla pewnych wartości swych pierwiastków. Funkcja taka jak $\frac{a}{b-x}$ w rzeczywistości nie zmienia się w sposób ciągły dla wszystkich wartości $x$, tylko dla tych, które są $>$ lub $< b$. Zatem dla wartości $x = b$ nie ma żadnej określonej wartości, ale funkcja staje się wtedy nieskończenie duża. Dlatego nie możemy powiedzieć, że wartości, jakie przyjmuje funkcja dla $x = b + \omega$, wszystkie są znane i mogą podejść do wartości $x = b$ tak blisko, jak tylko się chce. I to należy do pojęcia ciągłości (II.a). Jeśli teraz do powyższego twierdzenia dodamy pojęcie ciągłości, to pomijając przypadek, kiedy funkcja staje się nieskończona, otrzymamy twierdzenie słowo w słowo identyczne z tym, które należy udowodnić; mianowicie, że każda funkcja ciągła zmiennej $x$, która jest dodatnia dla $x = \alpha$ i ujemna dla $x = \beta$ musi przyjąć zero między $\alpha$ i $\beta$.

IV. Gdzieś można znaleźć następujący wniosek: „Ponieważ $fx$ jest dodatnia dla $x = \alpha$ i ujemna dla $x = \beta$, to muszą być między $\alpha$ i $\beta$ dwie wielkości $a$ i $b$, w których przejście od wartości dodatnich do ujemnych $fx$ odbywa się tak, że między $a$ i $b$ nie ma więcej wartości $x$, dla których $fx$ nadal byłaby dodatnia albo ujemna" itd. Ten błąd musi zostać odrzucony i nie byłby tu cytowany, gdyby nie służył jako dowód, że takie są poglądy niektórych szanowanych matematyków na ten temat. Dobrze wiadomo, że między dwoma bliskimi wartościami zmiennej niezależnej, na przykład pierwiastkami [Wurzel] $x$ pewnej funkcji, zawsze jest przyjmowanych nieskończenie wiele wartości pośrednich. W ten sam sposób funkcja ciągła nie ma ostatnich $x$, dla których jest ona dodatnia i nie ma pierwszych, dla których jest ujemna, więc nie ma żadnych liczb $a$ i $b$, które tutaj opisano!

V. Niepowodzenie tych prób udowodnienia twierdzenia doprowadziło do pomysłu wyprowadzania go z drugiego twierdzenia, o którym wspomnieliśmy na początku, mianowicie z rozkładu każdej funkcji na czynniki[9]. Nie ma wątpliwości, że jeśli ostatnie twierdzenie jest poprawne, to poprzednie można z niego wywnioskować. Ale faktem jest, że takiego wyprowadzenia nie można nazwać prawdziwie naukowym uzasadnieniem, bo drugie twierdzenie jasno wyraża prawdę bardziej złożoną niż pierwsze[10]. Dlatego drugie z pewnością może być oparte na pierwszym, ale nie odwrotnie – pierwsze na drugim. Nikomu tak naprawdę jeszcze nie udało się dowieść drugiego bez zakładania pierwszego. W odniesieniu do dowodu pana Gaussa z 1799 roku, ponieważ już został uznany za niewłaściwy, nie ma potrzeby zbadania czy opiera się on na naszym twierdzeniu, czy nie. Dowód pana Laplace'a[xiii], podobnie zawiera błędy, na które nie musimy tu zwracać uwagi, ponieważ dowód ten jest wyraźnie oparty na naszym twierdzeniu. Podobnie nie musimy brać pod uwagę pierwszego opublikowanego dowodu pana Gaussa, bo opiera się on na rozważaniach geometrycznych. Tymczasem łatwo byłoby pokazać, że nawet w tym dowodzie nasze twierdzenie jest milcząco przyjęte, a rozważania geometryczne w nim zawarte są bardzo podobne do tych, które uzasadnialiśmy

[xiii] W jego *Journal de l'école normale* lub też w Lacroix *Traité du calcul différentiel et intégral*, T. I. nr. 162, 163.

w I. Wszystko zależy więc od *Demonstratio nova altera i tertia* pana Gaussa[11].

Wyraźnie odnosi się on do naszego twierdzenia, kiedy zakłada na stronie 30 *Aequationem ordinis imparis certo solubilem esse*[12]; dobrze wiadomo, że twierdzenie to jest prostym wnioskiem z naszego twierdzenia. Nie jest jednak oczywiste, że *Demonstratio nova tertia* zależy od naszego twierdzenia. Opiera się m.in. na następującym twierdzeniu: Jeżeli funkcja ma wartości dodatnie dla wszystkich zmiennych wielkości $x$ leżących między $\alpha$ i $\beta$, to jej całka [Integral] od $x = \alpha$ do $x = \beta$ ma dodatnie wartości. W dowodzie tego twierdzenia podanym przez pana Lagrange'a[xiv] nie znajdujemy co prawda wyraźnego odwołania do naszego twierdzenia, ale dowód Lagrange'a nadal ma luki. Wymagane jest w nim przyjąć wielkości $i$ tak małe, by

$$\frac{f(x+i)-fx}{i} - f'x < \frac{f'x + f'(x+i) + f'(x+2i) + ... + f'(x+(n-1)i)}{n},$$

gdzie iloczyn $i \cdot n$ pozostaje równy pewnej danej wielkości, a dobrze znane oznaczenie $f'x$ przedstawia pierwszą pochodną funkcji $fx$. Teraz pojawia się pytanie: czy można spełnić ten wymóg? Jakkolwiek małe $i$ przyjmiemy, aby zmniejszyć różnicę

$$\frac{f(x+i)-fx}{i} - f'x,$$

to dzielnik prawej strony, $n$, musi stać się większy, jeżeli $i \cdot n$ pozostanie stałe. Ponadto zwiększenie zbioru wyrazów w liczniku spowoduje zwiększenie wartości jego mianownika; można też pokazać, że wartość całego ułamka zmniejsza się wraz ze zmniejszaniem $i$, tak samo lub bardziej niż wyrażenie

$$\frac{f(x+i)-fx}{i} - f'x,$$

co samo jest jeszcze do udowodnienia. Ta luka powinna zostać wypełniona, a to zapewne można zrobić jedynie w oparciu o nasze obecne twierdzenie, ponieważ wspomniany już dowód Lagrange'a, choć znacznie prostszy[xv], musi się do niego odnosić.

Podsumowując, wszystkie dotychczasowe dowody twierdzenia stanowiącego tytuł tej rozprawy są wadliwe. Przedstawię tu jeden dowód, który – jak mniemam – zawiera nie tylko potwierdzenie, ale i obiektywne uzasadnienie dowodzonej prawdy, tzn. jest ściśle naukowy[xvi].

Niżej przedstawię krótkie podsumowanie przyjętych metod.

Prawdą do udowodnienia jest, że twierdzenie głoszące, że między dwoma wartościami, $\alpha$ i $\beta$, które dają wyniki przeciwnych znaków, zawsze istnieje jakiś rzeczywisty pierwiastek, wyraźnie opiera się na bardziej ogólnej prawdzie, że jeżeli dwie

[xiv] *Leçons sur le Calcul des fonctions*, nowe wydanie, Paryż 1806, Lekcja 9, s. 89.

[xv] Mianowicie twierdzenie z §29 w traktacie: *Twierdzenie dwumianowe itd.*

[xvi] Nie należy oczekiwać, że prześledzę tu wszystkie zasady budowanego przeze mnie prawdziwego wykładu naukowego opisane w *Przyczynek do uzasadnionego przedstawienia matematyki* (II A). Będę wciąż przekonywał o całkowitej prawdziwości tych zasad; dokładność ich obowiązywania jest jednakowa tylko tam, gdzie to możliwe, gdzie wykład naukowy rozpoczyna się od zdań i pojęć podstawowych, ale nie tam, gdzie po prostu niektóre jego nauki traktuje się w kontekście całości, jak to się dzieje tutaj. Ta uwaga ma na celu lepsze zrozumienie dyskusji na temat twierdzenia o szeregu dwumianowym.

funkcje ciągłe zmiennej $x$, $fx$ i $\varphi x$, mają tę własność, że dla $x = \alpha$ jest $f\alpha < \varphi\alpha$, a dla $x = \beta$ jest $f\beta > \varphi\beta$, to zawsze musi być jakaś wartość $x$ leżąca między $\alpha$ i $\beta$, dla której zachodzi $fx = \varphi x$.

Jeśli $f\alpha < \varphi\alpha$, to na mocy prawa ciągłości jest $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$, gdy tylko $i$ jest wystarczająco małe. Dlatego własność bycia mniejszym zależy od funkcji zmiennej $i$ reprezentowanej przez wyrażenie $f(\alpha + i)$ dla wszystkich wartości $i$ mniejszych od pewnej. Niemniej jednak ta własność nie zachodzi dla wszystkich $i$ bez ograniczeń; mianowicie gdy $i = \beta - \alpha$, wtedy będzie $f\beta > \varphi\beta$. Zachodzi natomiast takie twierdzenie: gdy pewna własność $M$ przysługuje wszystkim wartościom zmiennej wielkości $i$, które są mniejsze od pewnej wielkości danej, ale nie wszystkim wartościom w ogóle, to zawsze jest jakaś największa wartość $u$, o której można pokazać, że wszystkie $i$, które są $< u$ mają własność $M$. Dla tej wartości $u$ nie może być $f(\alpha+u) < \varphi(\alpha+u)$, bo zgodnie z prawem ciągłości będzie wtedy $f(\alpha + u + \omega) < \varphi(\alpha + u + \omega)$, gdy $\omega$ jest wystarczająco małe; zatem nie będzie prawdą, że $u$ jest największą wartością, dla której zachodzi twierdzenie, że wszystkie wartości poniżej $i$ dają $f(\alpha + i) < \varphi(\alpha + i)$, bo $u + \omega$ będzie większą wartością, dla której nadal zachodzi to twierdzenie. Tym bardziej nie może być prawdą, że $f(\alpha + u) > \varphi(\alpha + u)$. Wtedy bowiem również zajdzie $f(\alpha + u - \omega) > \varphi(\alpha+u-\omega)$, gdy tylko $\omega$ będzie wystarczająco małe; zatem nie będzie prawdą, że dla wszystkich wartości $i$, które są $< u$, będzie $f(\alpha+i) < \varphi(\alpha+i)$. Musi zatem być $f(\alpha+u) = \varphi(\alpha+u)$, tj. istnieje wartość $x$ leżąca między $\alpha$ i $\beta$, mianowicie $\alpha+u$, dla której funkcje $fx$ i $\varphi x$ są sobie równe. Pozostaje już tylko kwestia wspomnianego dowodu. Twierdzenie udowodnimy pokazując, że te wartości $i$, o których można pokazać, że wszystkie mniejsze od nich posiadają własność $M$ i te, o których nie można tego pokazać mogą być umieszczone tak blisko siebie, jak tyko chcemy. Dlatego dla każdego, kto ma poprawne pojęcie wielkości istnienie $i$, które jest największe z tych, o których będzie można powiedzieć, że wszystkie wielkości poniżej niej mają własność $M$, jest rzeczywiste, tj. $i$ jest prawdziwą [wirkliche] wielkością.

***

Zanim skończę tę przedmowę pozwolę sobie na wyznanie dotyczące wszystkich moich wcześniejszych pism i, jeśli Bóg pozwoli, również późniejszych. Do tej pory ukazało się ich niewiele, w szczególności zarys nowej logiki dany w pierwszym numerze *Przyczynek do uzasadnionego przedstawienia matematyki*, w jego drugiej części zatytułowanej *O metodzie matematycznej*. Czytelnik zauważy, że pewne poglądy, jeśli nie zostaną uznane za całkowicie błędne, muszą prowadzić do pewnej reorganizacji we wszystkich naukach apriorycznych. Największą i najważniejszą część tych poglądów badałem długo z największą starannością i nadszedł już czas, bym ośmielił się mówić o nich głośniej. Poglądy obejmujące całe obszary jednej lub kilku nauk mogą być zaprezentowane na dwa sposoby: mogą być podane raz w ostatecznej rozprawie albo wykładane stopniowo w kolejnych pracach. Pierwszy sposób był dotychczas zdecydowanie bardziej powszechny. Uważam jednak, że dla doskonalenia nauki drugi sposób jest dużo bardziej korzystny, a to z następujących powodów.

Po pierwsze, dlatego, że dzięki temu autor, który odkrył kilka nowych idei, zmniejsza ryzyko związane ze zbytnim pośpiechem. Stopniowe wyjaśnianie pozwala odłożyć na później wyjaśnienie tych poglądów, co do których wcześniej były pewne wątpliwości. Pozwala wyciągnąć wnioski z krytyki, od odbiorców publikowanych artykułów i poprawić to, co było nieprawidłowe.

Po drugie, taki systematyczny rozwój poglądów może spotkać się z bardziej rygorystycznym podejściem ze strony samego czytelnika. Autor, który prezentuje już gotowy system, oferuje jego umysłowi zbyt wiele nowych twierdzeń. Należy jednak mieć nadzieję, że zostaną one sprawdzone z taką samą starannością, jak gdyby były przedstawione oddzielnie. Ten, kto przedstawia w pełni ukończone koncepcje, pokazuje lub przynajmniej powinien pokazać, w jaki sposób jedne prawdy wynikają z poprzednich. To zaś sprawia, że łatwiej zgadzamy się z tymi koncepcjami niż gdyby były przedstawione oddzielnie i pozostawiały wątpliwości, czy i w jakim stopniu powiązane są ze wszystkimi innymi prawdami, które przyjmujemy. Na koniec nie sposób zaprzeczyć, że sam widok opasłej księgi opisującej kompletny system, wzbudza swego rodzaju szacunek nim jeszcze ją przeczytamy. Czytając, odkrywamy pewne powiązania między twierdzeniami, strukturę ludzkiej wiedzy przedstawioną od podstaw w przyjemnej formie. A jeśli wszystko to jest wyłożone wedle miary, liczby i symetrii, to ma wpływać na nasz osąd i możemy nawet życzyć sobie, by okazało się, że jest to ten właściwy system, którego tak długo szukaliśmy! Ostatnią rzeczą, jaka może wtedy nastąpić, to wyobrażenie, że z uwagi na zauważoną spójność dopuszczamy tylko dwie możliwości: albo przyjmiemy system w całości, albo go w całości odrzucimy, podczas gdy ani jedno, ani drugie nie powinno się zdarzyć!

Głównie z uwagi na te zagrożenia w roku 1804 zdecydowałem się nie publikować kompletnego podręcznika, a w zamian najpierw przedstawić moje koncepcje w mniejszych pracach. I jeśli po wielu poprawkach, będzie mi dane zostać wyróżnionym spośród części społeczeństwa, to tylko wtedy należy rozważyć złożenie całego systemu. Oczywiście, o ile śmierć nie zostawi tego zadania dla innych.

Karierę matematyczną rozpocząłem od pracy zatytułowanej: *Refleksje nad niektórymi obiektami geometrii elementarnej* (Praga; C. Barth, 1804), w której przedstawiłem moje poglądy wraz z nową teorią równoległości[xvii]. Kilka lat później postanowiłem opublikować całość moich opinii na matematykę w serii pism pod tytułem: *Przyczynek do uzasadnionego przedstawienia matematyki.* Pierwsze z nich (Praga; C. Widtmann, 1810), chociaż wartościowe, nie miało szczęścia, w jednych czasopismach naukowych odmówiono publikacji, w innych zostało bardzo powierzchownie omówione i ocenione. To zmusiło mnie do zawieszenia kontynuacji tych wykładów, by tymczasem dać się bardziej poznać światu naukowemu, publikując prace, których tytuły zwiększą szanse zwrócenia na nie uwagi. W tym celu w 1816 ukazał się wspomniany już wcześniej *Szereg dwumianowy* itd. (Praga, Enders). Mam nadzieję, że ten artykuł również będzie służył temu celowi. Ponadto jego publikacja była konieczna, ponieważ dowodzę w nim twierdzeń, które sformułowałem w poprzedniej pracy. Niektóre inne prace są już gotowe do druku, np. *Trzy problemy rektyfikacji, kwadratury i kubatury bez założeń Archimedesa i bez żadnego ściśle dającego się udowodnić warunku wstępnego* i czekają na wydawcę[13].

[xvii] Teoria ta powinna skupić więcej uwagi z dwóch powodów: po pierwsze dlatego, że jest jedyną, w której nie można wykryć żadnego oczywistego błędu, następnie, ponieważ obecnie żyjący geometra francuski Legendre, w dziesiątej edycji swoich *Elémens de Géométrie*. Paryż. 1813, z pewnością niezależnie ode mnie, doszedł do dokładnie takiego samego oglądu rzeczy.

Powinienem teraz postąpić w sposób, który wydaje mi się najlepszy: muszę polegać na życzliwości opinii publicznej i prosić ją, by nie pomijała tej rozprawy z uwagi na małą objętość, lecz oceniła możliwie surowo wyniki tych badań i podała je do publicznej wiadomości. W ten sposób to, co jest niewystarczająco jasne może zostać wyjaśnione, a co jest zupełnie błędne może zostać odrzucone. Im szybciej to się stanie, tym lepiej dla osiągnięcia powszechnej akceptacji.

§1

Konwencja. Załóżmy, że dla szeregu [Reihe] wielkości nie zachodzi szczególny przypadek, że wszystkie wyrazy [Gliede] od pewnego miejsca są zerami tak jak to jest na przykład po $(n+1)$-szym wyrazie w szeregu[14] dwumianowym dla każdej dodatniej liczby całkowitej. Jest zatem jasne, że wartość tego szeregu, tj. wielkość powstała z sumowania jego wyrazów, nie zawsze będzie taka sama, gdy zbiór wyrazów będzie dowolnie zwiększany. Przeciwnie – wartość ta musi się zmieniać za każdym razem, gdy liczba wyrazów zostaje zwiększona o jeden niezerowy wyraz. Dlatego wartość szeregu zależy nie tylko od reguły determinującej budowę poszczególnych wyrazów, lecz także od ich liczby. Wartość ta reprezentuje zatem wielkość zmienną chociaż kształt i wielkość poszczególnych wyrazów pozostają niezmienione. Mając to na uwadze oznaczmy przez $F^{(r)}x$ lub $F^r x$ funkcję $x$ , która składa się z dowolnie długiego szeregu wyrazów i której wartość w związku z tym zależy nie tylko od $x$, ale także od liczby wyrazów, $r$. Zatem na przykład

$$A + Bx + Cx^2 + ... + Rx^r = F^r x,$$

a z drugiej strony

$$A + Bx + Cx^2 + ... + Rx^r + ... + Sx^{r+s} = F^{(r+s)}x.$$

§2

1. Komentarz. Zmiana wartości, tj. wzrost lub spadek wartości szeregu spowodowany zwiększeniem liczby jego wyrazów przez jakiś określony zbiór, np. przez jeden, może być, w zależności od okoliczności, wielkością stałą (gdy wszystkie wyrazy tego szeregu będą sobie równe), ale także może być wielkością zmienną. W tym drugim przypadku wielkość ta może czasami rosnąć, czasami maleć, czasami może być stała, a także może stale zwiększać się lub zmniejszać. Zatem zmiana szeregu

$$1 + 1 + 1 + 1 + ...$$

jeżeli jest on zwiększany o jeden wyraz jest wielkością stałą. Zmiana szeregu

$$a + ae + ae^2 + ae^3 + ...$$

przez zwiększenie o jeden wyraz jest wielkością zmienną, chyba, że $e = 1$. Staje się ona coraz większa gdy $e > \pm 1$ i mniejsza gdy $e < \pm 1$.

§3

2. Komentarz. Jeżeli zmiana wartości (wzrost lub spadek) spowodowana zwiększeniem zbioru jego wyrazów o określoną liczbę (np. o jeden) pozostaje tej samej wielkości lub zawsze się zwiększa – i jeżeli w obu przypadkach zachowuje ten sam znak – to jest oczywiste, że wartość tego szeregu będzie większa od każdej danej wielkości, o ile szereg będzie kontynuowany wystarczająco daleko. Załóżmy, że wzrost szeregu, który zachodzi wraz ze zwiększeniem go o każde $n$ wyrazów jest $=$ lub $>$ $d$ i chcemy, by szereg był większy od danej wielkości $D$. Weźmy liczbę całkowitą $r$, która jest $=$ lub $> D/d$ i wydłużmy szereg o $r \cdot n$ wyrazów. Uzyskamy wzrost, który jest

$$= lub > (r \cdot d = lub > \frac{D}{d} \cdot d = D).$$

§4

3. Komentarz. Jednak są także szeregi, których wartości nie mogą przekroczyć pewnej wielkości, jakkolwiek daleko mogą być te szeregi kontynuowane. Tego rodzaju jest szereg

$$a - a + a - a + ...,$$

którego wartość – jakkolwiek daleko go kontynuować – jest zawsze równa albo 0, albo $a$, więc nigdy nie przekracza wielkości $a$.

§5

4. Komentarz. Szczególnie interesująca wśród takich szeregów jest klasa szeregów posiadających własność, że wraz z ich przedłużaniem o kolejne wyrazy, zmiana wartości (wzrost lub spadek) pozostaje zawsze mniejsza od pewnej wielkości, która to znowu może być traktowana jako tak mała, jak to pożądane pod warunkiem, że szereg będzie przedłużany wystarczająco daleko. Istnienie takich szeregów jest udowodnione nie tylko przez przykład szeregów, w których od pewnego miejsca wszystkie wyrazy są zerami i które właściwie nie mają kontynuacji po tym wyrazie i nie są zdolne do dalszej zmiany wartości, jak szereg dwumianowy w §1, lecz także przez szeregi, których wyrazy zmieniają się w tym samym tempie lub szybciej niż wyrazy w postępie geometrycznym, w którym stosunek wyrazów jest odpowiednim ułamkiem. O wartości szeregu geometrycznego

$$a + ae + ae^2 + ... + ae^r + ...$$

wiadomo, że

$$= a\frac{1 - e^{r+1}}{1 - e}.$$

Jeżeli szereg ten wydłużymy o $s$ wyrazów, to wzrost jest

$$ae^{r+1} + ae^{r+2} + ae^{r+3} + ... + ae^{r+s} = ae^{r+1}\frac{1 - e^s}{1 - e}.$$

Gdy $e < \pm 1$ oraz $r$ są odpowiednio duże, to wzrost pozostaje mniejszy od każdej danej wielkości, bez względu na to jak duże jest $s$. Ponieważ $e^s$ zawsze jest $< \pm 1$, to oczywiste, że

$$ae^{r+1}\frac{1 - e^s}{1 - e}$$

jest zawsze mniejsze niż

$$ae^{r+1}\frac{2}{1-e}.$$

Ale ta ostatnia wielkość wraz ze wzrostem $r$ może być mniejsza niż każda dana [wielkość], ponieważ kolejna wartość powstaje z poprzedniej przez pomnożenie przez $e$ (Zobacz *Twierdzenie dwumianowe* §22). Dlatego tak dzieje się w każdym postępie geometrycznym, w którym stosunek wyrazów jest odpowiednim ułamkiem i który może być kontynuowany tak długo, aż wzrost spowodowany przedłużaniem szeregu będzie mniejszy niż pewna dana wielkość. Tym bardziej więc musi to zachodzić dla szeregów, których wyrazy maleją szybciej niż wyrazy malejącego postępu geometrycznego.

§6

5. Komentarz. Jeżeli wartości sum pierwszych

$$n, n+1, n+2, ..., n+r$$

wyrazów szeregu takiego jak w §5 oznaczymy odpowiednio przez

$$F^n x, F^{n+1}x, F^{n+2}x, ..., F^{n+r}x$$

(§1), to powstałe wielkości

$$F^1x, F^2x, F^3x, ..., F^nx, ..., F^{n+r}x$$

przedstawiają nowy szereg (zwany szeregiem sum poprzedniego). Założyliśmy tu specjalną własność, że różnica pomiędzy $n$-tym wyrazem $F^nx$ i każdym późniejszym $F^{n+r}x$, bez względu na to, jak daleko jest od $n$-tego wyrazu, pozostaje mniejsza od każdej danej wielkości jeżeli weźmiemy wystarczająco duże $n$. Ta różnica jest wzrostem od pierwotnego szeregu do tego, który jest kontynuowany poza $n$-ty wyraz, a wzrost ten może być z założenia tak mały, jak tylko się chce jeśli $n$ jest wystarczająco duże.

§7

Twierdzenie. Jeżeli szereg wielkości

$$F^1x, F^2x, F^3x, ..., F^nx, ..., F^{n+r}x, ...$$

ma tę własność, że różnica między $n$-tym wyrazem $F^nx$ i każdym późniejszym $F^{n+r}x$, jakkolwiek daleko od poprzedniego, może być mniejsza od każdej danej wielkości, gdy weźmiemy odpowiednio duże $n$, to zawsze jest pewna stała wielkość, i to tylko jedna, do której wyrazy szeregu się zbliżają i do której mogą podejść tak blisko jak tylko się chce, gdy szereg jest kontynuowany odpowiednio daleko.

Dowód. Istnienie szeregu takiego jak opisany w twierdzeniu wynika z §6. Ale założenie, że istnieje wielkość $X$, do której wyrazy szeregu mogą się zbliżać coraz bardziej nie jest niemożliwe, gdy szereg jest przedłużany coraz dalej i jeśli się jeszcze nie zakłada, że wielkość ta jest tylko jedna i niezmienna. Jeżeli jest to wielkość, która może się zmieniać, to może być ona zawsze brana odpowiednio blisko wyrazu $F^n x$, z którym jest porównywana lub nawet może być mu równa. Ale założenie niezmiennej [unveränderlichen] wielkości, która ma własność, że zbliża się do wyrazów szeregu nie niemożliwe; stąd wynika, że wielkość tę można określić tak dokładnie, jak tylko się chce. Załóżmy, że chcemy, by $X$ było określone dokładnie tak, by różnica między przyjętą a prawdziwą wartością $X$ nie przekraczała ustalonej małej wielkości $d$. Wtedy w danym szeregu szukam wyrazu $F^n x$ o tej własności, że każdy następny $F^{n+r}x$ różni się od niego o mniej niż $\pm d$. $F^n x$; z założenia muszą istnieć takie [wyrazy]. Mówię teraz, że wartość $F^n x$ różni się od prawdziwej wartości $X$ o co najwyżej $\pm d$. Bo jeżeli $r$ jest dowolnie zwiększane, to przy tym samym $n$, różnica $X - F^{n+r}x = \pm\omega$ może być tak mała jak tylko się chce. Ale różnica $F^n x - F^{n+r}x$ zawsze jest $< \pm d$, bez względu na to, jak duże będzie $r$. Dlatego różnica

$$X - F^n x = (X - F^{n+r}x) - (F^n x - F^{n+r}x)$$

zawsze musi być $< \pm(d+\omega)$. Ale ponieważ to samo $n$ jest wielkością stałą, i $\omega$ można uczynić tak małą jak tylko się chce poprzez zwiększanie $r$, to $X - F^n x$ musi być $=$ lub $< \pm d$. Bo gdyby było większe, np. równe $\pm(d+e)$, byłoby niemożliwe, aby $d + e < d + \omega$, tj. $e < \omega$ zachodziło, gdy $\omega$ będzie dalej zmniejszana. Dlatego też prawdziwa [wahre] wartość $X$ różni się od wartości wyrazu $F^n x$ o co najwyżej $d$, a zatem można ją dokładnie określić, ponieważ $d$ można wziąć dowolnie małą. Istnieje zatem rzeczywista [reelle] wielkość, której wyrazy szeregu będą tak blisko jak tylko się chce, jeśli będzie on kontynuowany wystarczająco daleko. Ale istnieje tylko jedna taka wielkość. Przypuśćmy, że oprócz $X$ jest inna stała wielkość $Y$, taka że wyrazy szeregu są tak blisko niej, jak tylko się chce, gdy jest on kontynuowany odpowiednio daleko. Zatem różnice $X - F^{n+r}x = \omega$ oraz $Y - F^{n+r}x = \omega_1$ mogą być tak małe jak tylko się chce, gdy weźmiemy wystarczająco duże $r$. Dlatego mają [one] też własną różnicę, tj. $X - Y = \omega - \omega_1$, co – jeśli $X$ i $Y$ są stałymi – jest niemożliwe, gdy nie jest prawdą, że $X = Y$, dlatego $X = Y$.

§8

Uwaga. Jeśli próbuje się określić wielkość $X$ w sposób opisany w poprzednim paragrafie, a mianowicie przez jeden z wyrazów, z których dany szereg jest złożony [zusammengesetzt], wówczas $X$ nigdy nie będzie dokładnie określone; chyba że wyrazy tego szeregu od pewnego miejsca są równe. Ale należy uważać, by nie wyciągnąć stąd wniosku, że wielkość $X$ musi być zawsze niewymierna [irrational]. Bo jeżeli weźmiemy np. szereg

$$0,1; 0,11; 0,111; 0,1111; \ldots$$

(który jest szeregiem sum postępu geometrycznego

$$\frac{1}{10}; \frac{1}{100}; \frac{1}{1000}; \frac{1}{10000}; \ldots)$$

to wielkość, której wyrazy będą tak blisko jak tylko się chce, nie jest niewymierna, ale jest ułamkiem $\frac{1}{9}$. Dlatego to, że wielkość ta nie może być dokładnie określona nie oznacza jeszcze, że nie może być podana w inny sposób i dlatego jest niewymierna.

§9

Komentarz. W związku z tym, gdy pewne szeregi mają tę własność, że każdy wyraz jest skończony, ale zmiana, która zachodzi przy kontynuowaniu szeregu jest mniejsza od każdej danej wielkości pod warunkiem, że liczba wziętych wyrazów jest wystarczająco duża, to wówczas zawsze jest tylko jedna stała wielkość, do której wartości tego szeregu mogą podejść tak blisko jak tylko się chce, gdy jest on kontynuowany odpowiednio daleko. Taki szereg opisano w §5 i, co za tym idzie, wartości, które są sumami $n, n+1, n+2, \ldots$ wyrazów spełniają warunki takie, jak te z §6 i §7 Dlatego taki szereg ma własność opisaną w §7.

§10

Uwaga. Nie należy sądzić, że w powyższym zdaniu z §9 warunek „zmiana (wzrost lub spadek), która zachodzi dla każdego wyrazu kontynuującego szereg, musi pozostać mniejsza od każdej danej wielkości, gdy szereg jest kontynuowany odpowiednio daleko" jest zbędny i że zdanie mogłoby być wyrażone w większej ogólności: „Jeżeli wyrazy szeregu, wraz z jego kontynuowaniem, mogą być coraz mniejsze i stać się tak małe jak tylko się chce, to zawsze jest pewna stała wielkość, której wartości tego szeregu mogą zbliżyć się tak bardzo jak tylko się chce". To twierdzenie byłoby obalone przez następujący przykład: wyrazy szeregu

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$$

mogą być tak małe jak tylko się chce, a znany jest fakt, z własności hiperboli prostokątnej (ale także z rozważań czysto arytmetycznych), że jeśli szereg ten jest kontynuowany odpowiednio daleko, to jego wartość może powiększać się do każdej danej wielkości.

§11

Uwaga wstępna. W badaniach matematyki stosowanej często powstaje sytuacja, że dla pewnych zmiennych wielkości $x$ zachodzi, że wszystkie ich wartości, które są mniejsze niż pewne $u$, mają ustaloną własność $M$, przy czym nie wiadomo, czy ta własność zachodzi dla wszystkich wartości, które są większe niż $u$. W takich przypadkach mogą być pewne $u_1$, które są $> u$ i dla których w taki sam sposób jak dla $u$ zachodzi, że wszystkie wartości $x$ poniżej [wartości $u_1$] posiadają własność $M$. Ta własność może nawet zachodzić dla wszystkich $x$ bez wyjątku. Ale jeśli wiadomo, że $M$ nie zachodzi dla wszystkich $x$ w ogólności, to łącząc te dwa warunki, istnieje pewna wielkość $U$, która jest największa wśród tych, dla których jest prawdą, że wszystkie $x$ mniejsze [od nich] posiadają własność $M$. Jest to udowodnione w następnym twierdzeniu.

§12

Twierdzenie. Jeżeli własność $M$ nie zachodzi dla wszystkich wartości zmiennej wielkości $x$, ale dla wszystkich, które są mniejsze niż pewne $u$, to zawsze jest pewna wielkość $U$, która jest największa wśród tych, o których można stwierdzić, że wszystkie $x$ mniejsze [od nich] mają własność $M$.

Dowód. 1. Ponieważ własność $M$ zachodzi dla każdego $x$ mniejszego niż $u$, ale nie dla każdego $x$ w ogólności, to jest pewna wartość $V = u + D$ (gdzie $D$ jest pewną dodatnią [wielkością]), o której można stwierdzić, że $M$ nie zachodzi dla wszystkich $x$, które są $< V = u+D$. Gdy zapytam, czy $M$ zachodzi dla wszystkich $x$, które są $< u + \frac{D}{2^m}$, gdzie wykładnik $m$ jest najpierw 0, potem 1, potem 2, potem 3, itd., to jestem pewny, że na pierwsze z moich pytań muszę odpowiedzieć przecząco. Pytanie, czy $M$ zachodzi dla wszystkich $x$, które są $< u + \frac{D}{2^0}$ jest takie samo, jak pytanie, czy $M$ zachodzi dla wszystkich $x$ które są $< u + D$, to jednak jest sprzeczne z założeniem. Zatem to zależy od tego, czy na każde kolejne pytanie, gdy $m$ bierze się coraz większe, będzie trzeba odpowiedzieć przecząco. Powinno być jasne, że $u$ jest największą wartością, dla której twierdzenie zachodzi – że każdy $x$, który jest od niego mniejszy ma własność $M$. Na razie nie byłoby większego, np. $u + d$, dla którego twierdzenie by zachodziło, tj. wszystkie $x$, które są $< u + d$ miałyby własność $M$. Ale jasne jest, że jeśli wezmę odpowiednio duże $m$, to dla niego $u + \frac{D}{2^m}$ będzie $=$ lub $< u + d$, więc gdyby $M$ zachodziło dla wszystkich $x$, które są $< u + d$, to także zachodziłoby dla wszystkich, które są $< u + \frac{D}{2^m}$, więc na pytanie nie mógłbym odpowiedzieć przecząco, lecz koniecznie twierdząco. W ten sposób udowodniono, że w tym przypadku (gdy na wszystkie powyższe pytania odpowiem przecząco) istnieje określona wielkość $U$ (nazwana $u$), która jest największą wśród tych, dla których zachodzi twierdzenie, że wszystkie $x$ poniżej posiadają własność $M$.

2. Lecz kiedy odpowiemy twierdząco na powyższe pytanie, zaś $m$ jest pierwszą wartością wykładnika, dla którego jest ono spełnione ($m$ może być 1, ale jak widzieliśmy nie 0), to wiem, że własność $M$ zachodzi dla wszystkich $x$, które są $< u + \frac{D}{2^m}$, ale nie dla wszystkich $x$, które są $< u + \frac{D}{2^{m-1}}$. Ale różnica między $u + \frac{D}{2^{m-1}}$ oraz $u + \frac{D}{2^m}$ jest $= \frac{D}{2^m}$. Zatem postępując jak poprzednio z różnicami $D$, tj. ponownie zapytam, czy $M$ zachodzi dla wszystkich $x$, które są $< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}}$, gdzie wykładnik $n$ jest równy najpierw 0, potem 1, potem 2, potem 3, itd. Zatem znów można być pewnym, że przynajmniej odpowiedź na pierwsze pytanie musi być przecząca. Pytanie, czy $M$ zachodzi dla wszystkich $x$, które są $< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+0}}$ jest takie samo jako to, czy $M$ zachodzi dla wszystkich $x$, które są $< u + \frac{D}{2^{m-1}}$, na które już odpowiedzieliśmy przecząco. Ale jeśli wszystkie kolejne pytania – gdy $n$ jest coraz większe – są odrzucane, to będzie jak przedtem, że $u + \frac{D}{2^m}$ lub $U$ jest największą wartością, dla której zachodzi twierdzenie, że wszystkie $x$ poniżej niej mają własność $M$.

3. Jednak, jeśli odpowiedź na jedno z powyższych pytań jest twierdząca i $n$ jest wartością, dla której zachodzi [teza postawiona w pytaniu], to wiem, że $M$ zachodzi dla wszystkich $x$, które są $< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}}$, ale już nie dla wszystkich $x$, które są $< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n-1}}$. Różnica między tymi dwoma wartościami jest $= \frac{D}{2^{m+n}}$, więc powtarzamy procedurę dla $\frac{D}{2^m}$ itd.

4. Jeżeli kontynuuję to postępowanie odpowiednio długo, to widać, że wynik musi być jedną z dwóch możliwości:

a. Mogę znaleźć wartość postaci $u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots + \frac{D}{2^{m+n+\ldots+r}}$, która jest największą, dla której zachodzi twierdzenie, że wszystkie $x$ stojące poniżej niej mają własność $M$. Dzieje się tak wtedy, gdy pozytywnie odpowiem na pytanie, czy M zachodzi dla wszystkich $x$, które są $< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + \ldots +$

$\frac{D}{2^{m+n+...+r+s}}$, dla każdej wartości $s$.

b. Lub mogę stwierdzić, że $M$ zachodzi dla wszystkich $x$, które są $< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + ... + \frac{D}{2^{m+n+...+r}}$, ale już nie dla tych, które są $< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + ... + \frac{D}{2^{m+n+...+r-1}}$. Tu zawsze zaznaczam, że dobrze jest zwiększać liczbę wyrazów obu wielkości, zadając kolejne pytania.

5. Gdyby zachodzi pierwszy przypadek, wtedy prawdziwość twierdzenia jest już udowodniona. W drugim przypadku można zauważyć, że wielkość $u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + ... + \frac{D}{2^{m+n+...+r}}$ przedstawia po prostu szereg, którego liczbę wyrazów można dowolnie zwiększać i który należy do klasy opisanej w §5. Ponieważ, zależnie od tego, czy $m, n, ..., r$ są bądź $= 1$, czy też część z nich jest większa od 1, [szereg ten] maleje tak samo lub szybciej jak postęp geometryczny, którego wykładnik jest ułamkiem właściwym $\frac{1}{2}$. Dlatego ma [on] własność z §9, tj. istnieje taka stała wielkość, że jego wyrazy mogą być tak blisko jak tylko się chce, jeśli ich zbiór jest dostatecznie zwiększany. Niech tą wielkością będzie $U$. Twierdzę teraz, że własność $M$ zachodzi dla wszystkich $x$, które są $< U$. Bo jeśli nie zachodzi dla niektórych $x$, które są $< U$, np. dla $U - \delta$, to wielkość

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + ... + \frac{D}{2^{m+n+...+r}}$$

taka, że każdy $x$, który jest od niej mniejszy i dla którego zachodzi własność $M$, musiałaby być w odległości $\delta$ od $U$. Zatem dla każdego $x$, który jest

$$= u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + ... + \frac{D}{2^{m+n+...+r}} - \omega,$$

gdzie $\omega$ jest małe, zachodzi własność $M$. Z drugiej strony $M$ nie zachodzi dla $x = U - \delta$, więc musi być:

$$U - \delta > u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + ... + \frac{D}{2^{m+n+...+r}} - \omega$$

lub

$$U - (u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + ... + \frac{D}{2^{m+n+...+r}}) > \delta - \omega.$$

Dlatego różnica pomiędzy $U$ i szeregiem nie może być tak mała jak tylko się chce, bo $\delta - \omega$ nie może być tak małe jak tylko się chce; podczas gdy $\delta$ nie może się zmieniać, $\omega$ może być mniejsza od każdej danej wielkości. Ale $M$ nie może zachodzić dla wszystkich $x$, które są $< U + \varepsilon$. Ale wartość szeregu

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + ... + \frac{D}{2^{m+n+...+r-1}}$$

może być traktowana jako dowolnie bliska wartości

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + ... + \frac{D}{2^{m+n+...+r}},$$

ponieważ różnica między nimi wynosi tylko $\frac{D}{2^{m+n+...+r}}$. Ponadto, ponieważ wartości w drugim szeregu mogą być dowolnie blisko $U$ i wartości w pierwszym szeregu mogą dowolnie blisko $U$, dlatego

$$u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + ... + \frac{D}{2^{m+n+...+r-1}}$$

z pewnością może stać się $< U + \varepsilon$. Ale na mocy założenia, $M$ nie zachodzi dla wszystkich $x$, które są

$$< u + \frac{D}{2^m} + \frac{D}{2^{m+n}} + ... + \frac{D}{2^{m+n+...+r-1}},$$

lecz dla znacznie mniejszych, tym bardziej dla wszystkich $x$, które są $< U + \varepsilon$. Zatem $U$ jest największą wartością, dla której twierdzenie zachodzi, tj. wszystkie $x$ poniżej niej posiadają własność $M$.

§13

Uwaga 1. Ostatnie twierdzenie ma ogromne znaczenie i jest używane we wszystkich dziedzinach matematyki, zarówno w analizie, jako i matematyce stosowanej, w geometrii, chronometrii i mechanice. Nierzadko w przeszłości zamiast niego stosowano fałszywe zdanie: „Jeżeli własność $M$ zachodzi nie dla wszystkich $x$, ale dla wszystkich mniejszych niż pewna [wartość], to zawsze jest jakiś największy $x$, dla którego własność $M$ zachodzi". To, jak już pokazano, jest fałszywe w świetle twierdzenia. Bo jeśli istnieje pewna wielkość $U$, która jest największą z tych, że wszystkie $x$ poniżej niej mają własność $M$, to nie ma największego $x$, dla którego własność zachodzi pod warunkiem, że $x$ jest wartością zmieniającą się w sposób ciągły. Ponieważ zgodnie z prawem ciągłości nie ma największej wielkości mniejszej niż określona granica $U$, nawet gdy uwzględnimy wielkości stojące przy granicy, to wciąż możemy brać wielkości bliżej niej. W celu zilustrowania tego rozważmy prostokątną hiperbolę: weźmy oś $x$ jako jedną z jej asymptot i początek, jednak nie w środku $c$, ale w innym punkcie $a$, który jest w odległości $D$ od $c$. Teraz obierzmy dodatnią oś $x$ za kierunek $ac$ i dodatnią półoś osi $y$ za kierunek $ab$, który jest prostopadły do osi rzędnych. Następnie każda współrzędna $x$, która jest mniejsza niż pewna [wartość], powiedzmy mniejsza niż $\frac{D}{2}$, ma tę własność, że odpowiadająca jej rzędna jest dodatnia. Jednak ta własność ($M$) nie będzie zachodziła dla wszystkich dodatnich współrzędnych $x$, tzn. nie dla tych, które są większe niż $D$. Czy jest tu największa wartość $x$, dla której zachodzi własność $M$? W żadnym wypadku; prawdopodobnie $U$ jest odciętą $x$, która jest największą wśród tych, o których można powiedzieć, że wszystkie mniejsze niż ona mają dodatnie rzędne, tj. posiadają własność $M$. Tą odciętą jest $+D$.

§14

Uwaga 2. Być może ktoś mógłby stwierdzić, że dowód twierdzenia z §12 można było osiągnąć w następujący sposób: „Gdyby nie było największego $U$, dla którego zachodzi twierdzenie, iż wszystkie $x$ poniżej niego posiadają własność $M$, to zawsze bylibyśmy w stanie wziąć $u$ coraz większe, tak duże jak tylko się chce, a w konsekwencji $M$ musiałoby zachodzić dla wszystkich $x$ bez wyjątku". Jednak prowadziłoby to do błędnego wniosku, bo opiera się na ukrytym założeniu, że „wielkość, która może być zawsze brana większa i większa, może stać się tak duża jak tylko się chce". To fałsz, jak można wykazać na przykładzie znanego szeregu $1/2 + 1/4 + 1/8 + ...$, którego wartość może być zawsze większa niż jest obecnie, a mimo to zawsze pozostaje $<$ od 1! Nie wspomnieliśmy nawet tego tak łatwo zauważalnego błędu, bo popełniali go nie tyle matematycy, co pewien autor w niedawnej „Kompletnej teorii równoległości".

§15

Twierdzenie. Jeśli dwie funkcje $x$, $fx$ oraz $\varphi x$, różnią się zgodnie z prawem ciągłości albo dla wszystkich wartości $x$ lub tylko dla tych, które leżą między $\alpha$ i $\beta$, i jeśli $f\alpha < \varphi\alpha$ oraz $f\beta > \varphi\beta$, to zawsze między $\alpha$ i $\beta$ jest pewna wartość $x$, dla której $fx = \varphi x$.

Dowód. Musimy pamiętać, że w tym twierdzeniu wartości funkcji $fx$ i $\varphi x$ są porównywane ze sobą w ich wielkościach bezwzględnych, tj. bez względu na znak lub tak, jak gdyby te wielkości nie były przeciwnych znaków. Ale to zależy od oznaczenia $\alpha$ i $\beta$.

I. 1. Załóżmy najpierw, że obie [wielkości] $\alpha$ i $\beta$ są dodatnie i (bez straty ogólności) $\beta$ jest większą z nich; więc $\beta = \alpha + i$, gdzie $i$ oznacza dodatnią wielkość. Ponieważ $f\alpha < \varphi\alpha$, to jeżeli $\omega$ jest jakąś dodatnią wielkością, która zawsze może być wzięta tak mała jak tylko się chce, to $f(\alpha+\omega) < \varphi(\alpha+\omega)$. Ponieważ $fx$ i $\varphi x$ są ciągłe dla wszystkich $x$, które leżą między $\alpha$ i $\beta$ oraz $\alpha+\omega$ leży między $\alpha$ i $\beta$ ilekroć $\omega < i$, musimy wziąć $f(\alpha+\omega) - f\alpha$ oraz $\varphi(\alpha+\omega) - \varphi\alpha$, które mogą być tak małe jak tylko się chce, jeżeli $\omega$ jest odpowiednio małe. Stąd jeżeli $\Omega$ i $\Omega'$ oznaczają wielkości, które możemy uczynić tak małymi jak tylko się chce,

$$f(\alpha+\omega) - f\alpha = \Omega$$

i

$$\varphi(\alpha+\omega) - \varphi\alpha = \Omega',$$

to

$$\varphi(\alpha+\omega) - f(\alpha+\omega) = \varphi\alpha - f\alpha + \Omega' - \Omega.$$

Ale z założenia $\varphi\alpha - f\alpha$ jest równe pewnej dodatniej wartości $A$, dlatego

$$\varphi(\alpha+\omega) - f(\alpha+\omega) = A + \Omega' - \Omega,$$

co pozostaje dodatnie, gdy $\Omega$ i $\Omega'$ będą odpowiednio małe, tj. jeśli dane $\omega$ jest bardzo małą wartością, to tym bardziej zachodzi dla wszystkich mniejszych wielkości. Zatem można stwierdzić, że dla wszystkich wielkości $\omega$ mniejszych od pewnej [ustalonej wielkości] dwie funkcje $f(\alpha+\omega)$ i $\varphi(\alpha+\omega)$ są w stosunku mniejsza do większej.

Oznaczmy tę własność przez $M$. Możemy zatem powiedzieć, że wszystkie $\omega$, które są mniejsze niż pewna [wielkość] posiadają własność $M$. Ale ta własność nie zachodzi dla wszystkich $\omega$, mianowicie nie [zachodzi] dla $\omega = i$, ponieważ $f(\alpha+i) = f\beta$, z założenia jest więc nie $<$, lecz $> \varphi(\alpha+i) = \varphi\beta$. Stąd, zgodnie z §12, musi być dana pewna wielkość $U$, która jest największą z tych, dla których zachodzi, że wszystkie $\omega$, które są $< U$ mają własność $M$.

2. To $U$ musi leżeć między 0 oraz $i$.

Po pierwsze, nie może być $= i$, ponieważ to oznaczałoby, że $f(\alpha+\omega) < \varphi(\alpha+\omega)$ ilekroć $\omega < i$ jest dowolnie blisko wartości $i$. Ale właśnie udowodniono, że założenie $f\alpha < \varphi\alpha$, daje $f(\alpha+\omega) < \varphi(\alpha+\omega)$, jeżeli $\omega$ jest wzięte wystarczająco małe, więc można również wykazać, że założenie $f(\alpha+i) > \varphi(\alpha+i)$ daje $f(\alpha+i-\omega) > \varphi(\alpha+i-\omega)$ jeżeli $\omega$ jest wystarczająco małe. Zatem nie jest prawdą, że dwie funkcje $fx$ i $\varphi x$ są w stosunku mniejsza wielkość do większej dla wszystkich wartości $x$, które są $< \alpha + i$.

Po drugie, jeszcze mniej może być prawdą, że $U > i$, bo wtedy $i$ byłoby jedną z wartości $\omega$, które są $< U$, zatem także musiałoby być $f(\alpha+i) < \varphi(\alpha+i)$, co jest sprzeczne z założeniem twierdzenia. Dlatego, ponieważ $U$ jest dodatnie, to leży między 0 oraz $i$, w konsekwencji $\alpha + U$ leży między $\alpha$ i $\beta$.

3. Można teraz zapytać jaka relacja zachodzi między $fx$ a $\varphi x$ dla wartości $x = \alpha + U$.

Po pierwsze, nie może być prawdą, że $f(\alpha+U) < \varphi(\alpha+U)$, bo to dałoby też $f(\alpha+U+\omega) < \varphi(\alpha+U+\omega)$, gdy $\omega$ jest wystarczająco małe, zatem $\alpha + U$ nie byłoby największą wartością, dla której można stwierdzić, że wszystkie mniejsze $x$ mają własność $M$.

I po drugie $f(\alpha+U) > \varphi(\alpha+U)$ nie może być prawdą, ponieważ wtedy również $f(\alpha+U-\omega) > \varphi(\alpha+U-\omega)$ jeżeli $\omega$ jest wystarczająco małe i byłoby sprzeczne z warunkiem, że własność $M$ jest prawdziwa dla wszystkich $x$, które są poniżej $\alpha+U$. Zatem pozostaje tylko $f(\alpha+U) = \varphi(\alpha+U)$ i jest udowodnione, że między $\alpha$ i $\beta$ jest wartość $x$, dla której $fx = \varphi x$.

II. Ten sam dowód dotyczy też przypadku, gdy $\alpha$ i $\beta$ są obie ujemne; skoro tylko weźmie się $\omega$, $i$ oraz $U$ jako ujemne wielkości; podczas gdy $\alpha+\omega$, $\alpha+i$, $\alpha+U$, $\alpha+U-\omega$ są w podobny sposób wielkościami między $\alpha$ i $\beta$.

III. Jeżeli $\alpha = 0$ i $\beta$ jest dodatnie, to bierzemy $i(=\beta)$, $\omega$, $U$ dodatnie; jeżeli $\beta$ jest ujemne, to te inne [czyli $\omega$, $U$] bierzemy ujemne, i dowód może być zastosowany dosłownie.

IV. Jeżeli wreszcie $\alpha$ i $\beta$ są przeciwnych znaków (bez utraty ogólności), np. $\alpha$ jest ujemne, $\beta$ dodatnie, to założenie o ciągłości funkcji $fx$ i $\varphi x$ stwierdza, że ciągłość dotyczy wszystkich wartości $x$, które w przypadku ujemnych są $< \alpha$, a w przypadku dodatnich są $< \beta$. Wśród nich jest wartość $x = 0$. Bada się więc stosunek $fx$ i $\varphi x$ dla $x = 0$. Jeżeli $f(0) = \varphi(0)$, to twierdzenie jest już udowodnione. Ale jeżeli $f(0) > \varphi(0)$, to ponieważ $f\alpha < \varphi\alpha$, to mamy z III wartość między 0 i $\alpha$, i jeżeli $f(0) < \varphi(0)$, wartość między 0 i $\beta$, dla której $fx = \varphi x$. Zatem w każdym przypadku istnieje wartość $x$ między $\alpha$ i $\beta$, która daje $fx = \varphi x$.

## §16

Uwaga. W żaden sposób nie można stwierdzić, że istnieje tylko jedna wartość $x$, która daje $fx = \varphi x$. Mianowicie, jeśli $f\alpha < \varphi\alpha$ i $f(\alpha+U) = \varphi(\alpha+U)$, to musimy rzeczywiście mieć $f(\alpha+U+\omega) > \varphi(\alpha+U+\omega)$ jeżeli $\omega$ jest brane odpowiednio małe, tj. funkcja $fx$ która wcześniej była mniejsza niż $\varphi x$ musi, po tym jak są sobie równe, stać się większa niż $\varphi x$. Jednak z coraz większym wzrostem $\omega$ jest z pewnością możliwe, że przed $\alpha + U + \omega = \beta$ jest wartość, dla której $fx$ jest za każdym razem $< \varphi x$. W takim przypadku z naszego twierdzenia bezpośrednio wynika, że muszą być dwie inne różne wartości między $\alpha$ i $\beta$ oprócz $U$, które sprawią, że $fx = \varphi x$. W przypadku, gdy $f(\alpha+U+\kappa) < \varphi(\alpha+U+\kappa)$, to ponieważ $f(\alpha + U + \omega)$ było już większe niż $\varphi(\alpha + U + \omega)$, to musi być wartość $x$ między $\alpha + U + \omega$ i $\alpha + U + \kappa$, tj. taka, że między $\alpha$ i $\beta$ jest $x$, dla którego $fx = \varphi x$. I w ten sam sposób, ponieważ $f(\alpha + i)$ lub $f\beta > \varphi\beta$, to istnieje wartość $x$ między $\alpha + U + \kappa$ oraz $\beta$, dla której $fx = \varphi x$. W ten sposób jasno dostajemy, że musi być zawsze wartość $x$, która daje $fx = \varphi x$.

§17

Twierdzenie. Każda funkcja postaci $a + bx^m + cx^n + ... + px^r$, gdzie $m, n, ..., r$ oznaczają dodatnie wykładniki, jest wielkością, która zmienia się zgodnie z prawem ciągłości dla wszystkich wartości $x$.

Dowód. Jeżeli $x$ zmienia się do $x + \omega$, to zmiana funkcji jest

$$= b[(x + \omega)^m - x^m] + c[(x + \omega)^n - x^n] + ... + p[(x + \omega)^r - x^r]$$

co, jak można łatwo wykazać, jest wielkością tak małą jak tylko się chce. Na podstawie wzoru dwumianowego, którego prawdziwość dla dodatnich potęg (§8) jest niezależna od wyników badań niniejszej pracy, wielkość ta jest równa:

$$\begin{aligned}\omega[mbx^{m-1} + m\frac{m-1}{2}bx^{m-2}\omega + ... + b\omega^{m-1}+\\ +ncx^{n-1} + n\frac{n-1}{2}cx^{n-2}\omega + ... + c\omega^{n-1}+\\ +......................+\\ +rpx^{r-1} + r\frac{r-1}{2}px^{r-2}\omega + ... + p\omega^{r-1}].\end{aligned}$$

Zbiór wyrazów z czynnikami zawartymi w nawiasie jest, jak wiadomo, zawsze skończony i [to, że jest skończony] nie zależy od wartości wielkości $x$ i $\omega$. Ponieważ te występują tylko z dodatnimi potęgami, to wartość każdego wyrazu, a w konsekwencji całego wyrażenia dla każdej wartości $x$ (więc też dla $x = 0$) jest zawsze skończona. Ale jeśli przy tym samym $x$ wartość $\omega$ jest zmniejszana, to wyrazy, w których pojawia się [wartość $\omega$], będą zmniejszone, podczas gdy inne pozostają bez zmian. Oznaczmy zatem przez $S$ wielkość, która powstaje z tego wyrażenia, gdy do każdego jego wyrazu wstawić pewne określone $\omega$, np. $\omega_1$. Teraz dodajmy do siebie wyrazy tak jakby wszystkie miały ten sam znak. To jest faktyczna [wirkliche] wartość, jaką przyjmuje wyrażenie dla $\omega_1$. Z pewnością nie jest ona $> S$, lecz gdy wziąć dowolne mniejsze $\omega$, jest na pewno $< S$. Wniosek stąd taki, że zmiany, którym podlega funkcja $a + bx^m + cx^n + ... + px^r$, wypadają $< D$. Dlatego, gdy weźmie się tylko takie $\omega$, które jest $< \omega_1$ i takie, że $< \frac{D}{S}$, to $\omega \cdot S$, a tym bardziej iloczyn z $\omega$ jako wielkością, która jest $< S$, musi być $< D$.

§18

Twierdzenie. Jeżeli funkcja postaci:

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + ... + px + q,$$

gdzie $n$ oznacza liczbę dodatnią, przyjmuje dodatnią wartość dla $x = \alpha$ i ujemną dla $x = \beta$, to równanie

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + ... + px + q = 0$$

ma jedno rozwiązanie rzeczywiste między $\alpha$ i $\beta$.

Dowód. 1. Jeżeli $\alpha$ i $\beta$ są tych samych znaków (obie dodatnie lub obie ujemne), to jest oczywiste, że dodatnie lub ujemne wyrazy funkcji dla $x = \alpha$ zachowują ten sam znak dla $x = \beta$ i dla wszystkich wartości $x$, które leżą między $\alpha$ i $\beta$. Załóżmy teraz, że wartość funkcji jest dodatnia dla $x = \alpha$, ale ujemna dla $x = \beta$. Ta zmiana może powstać tylko dlatego, że suma dodatnich wyrazów okazuje się większa niż ujemnych dla $x = \alpha$, ale mniejsza niż ujemnych wyrazów dla $x = \beta$. Ale suma pierwszych, jak również tych ostatnich ma postać:

$$a + bx^m + cx^n + ... + px^r$$

z §17, jest zatem funkcją ciągłą. Oznaczmy więc pierwsze przez $\varphi x$, drugie przez $fx$. Następnie, ponieważ $f\alpha < \varphi\alpha$ oraz $f\beta > \varphi\beta$, to z §15 musi być jakaś wartość $x$ między $\alpha$ i $\beta$, dla której $fx = \varphi x$. Ale dla tej wartości $fx - \varphi x$, tj. dana funkcja jest zerem. Dlatego ta wartość jest rozwiązaniem równania

$$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + ... + px + q = 0.$$

2. Ale jeśli $\alpha$ i $\beta$ są przeciwnych znaków, to zwracamy uwagę na to, jaką wartość funkcja przyjmuje dla $x = 0$. Jeśli zero, to wiadomo, że dane równanie ma rzeczywisty pierwiastek leżący między $\alpha$ i $\beta$, tzn. $x = 0$. Jeśli jednak wartość (wielkość $q$) jest dodatnia dla $x = 0$, ale ujemna dla $x = \beta$ i ponieważ te same wyrazy, które są dodatnie lub ujemne dla $x = \beta$ zachowują te znaki dla wszystkich wartości znajdujących się między 0 i $\beta$, to można udowodnić za pomocą tych samych argumentów, co w części 1 dowodu, że musi być wartość $x$ pomiędzy 0 a $\beta$, która powoduje zerowanie się funkcji. Wreszcie, jeśli $q$ jest ujemne, to, jak już powiedziano, własność wciąż zachodzi pod warunkiem, że w miejsce $\beta$ przyjmiemy $\alpha$. A skoro wartość leżąca między 0 i $\beta$ lub między 0 i $\alpha$, leży także między $\alpha$ i $\beta$, gdy są one przeciwnych znaków, to twierdzenie okazało się prawdziwe w każdym przypadku.

## Przypisy od tłumacza

[1]Tytułowe twierdzenie należy rozumieć jako traktujące o wielomianach jednej zmiennej. Bolzano odróżnia jego dwie wersje: pierwsza odnosi się do funkcji, w szczególności wielomianów, druga – do linii rozumianej jako obiekt geometryczny. Odpowiednio odróżnia też dowód *czysto-analityczny* i *geometryczny*.

[2]*Algebraiczna wymierna funkcja całkowita*, Algebraische rationale ganze Funktion, to funkcja postaci $\frac{f}{g}$ , gdzie $f$, $g$ są wielomianami zmiennej $x$ o współczynnikach całkowitych. W szczególności są to więc także wielomiany o współczynnikach wymiernych. Bolzano ma zatem na uwadze twierdzenie, które współcześnie jest przedstawiane jako wniosek z zasadniczego twierdzenia algebry: Każdy wielomian o współczynnikach wymiernych można rozłożyć w pierścieniu $\mathbb{R}[x]$ na czynniki liniowe lub 2-giego stopnia.

[3]Współcześnie punkt $P$ leżący na płaszczyźnie opisujemy parą liczb $(x, y)$, gdzie, zgodnie z tradycją sięgającą matematyki greckiej, $x$ nazywamy *odciętą*, $y$ – *rzędną*. Niech $f$ oznacza

funkcję spełniającą założenia określone w komentowanym zdaniu. Twierdzenie, o którym pisze Bolzano można wówczas tak zapisać: Jeśli $f(x_1) < 0$, $f(x_2) > 0$, to musi istnieć taki punkt $x_3$, że $x_1 < x_3 < x_2$ oraz $f(x_3) = 0$. Pojęcia *odcięta* i *rzędna*, którymi posługuje się Bolzano nie oddają tego z należytą precyzją. W rozprawie istotne jest jednak odróżnienie *linii*, Linie, i *funkcji*, Funktion. *Odcięta* i *rzędna* są stosowane do linii. W odniesieniu do funkcji Bolzano używa pojęć *wartość*, Werth – to pojęcie zwykle oznacza argument, oraz *wielkość*, Größe, które najczęściej oznacza wartość funkcji w dzisiejszym rozumieniu, czyli $f(x)$.

[4] *Przejście z jednego rodzaju na inny.* Ten cytat z Arystotelesa odnajdujemy w traktatach *O niebie*, 1,1,268 b, oraz *Analityki Wtóre*, 1,7,75 a. Przytoczymy szerszy kontekst, w którym pada to zdanie, bo odróżnienie *prawd geometrycznych i arytmetycznych* jest ważne w kontekście uwag metodologicznych zawartych *Przedmowie*. „Zatem, nie można w dowodzeniu przejść z jednego rodzaju do innego, na przykład dowieść tego geometrycznego arytmetycznie. W dowodzeniu bowiem istnieją te trzy: pierwszy, to, co jest dowiedzione, to znaczy istotny atrybut rodzaju; drugi, aksjomaty, to znaczy aksjomaty będące przesłankami dowodu; trzeci, przyjmowany rodzaj, którego własności, to znaczy istotne atrybuty są pokazane przez dowód. Aksjomaty, które tworzą podstawę dowodu mogą być te same, ale w przypadku różnych rodzajów, takich jak arytmetyka i geometria, nie można zastosować arytmetycznego dowodu do własności wielkości, chyba że te wielkości są liczbami", Arystoteles, *Analityki Wtóre*, 1,1, 75 a–75 b, w: I. Bekker (ed.), *Aristotelis Opera*, tł. P. Błaszczyk, K. Mrówka.

[5] *Potwierdzenia*, *Gewißmachungen*, dosłownie *uczynienie pewnym*; *uzasadnienia*, *Begründungen*; *przedstawienia, (opisy)*, *Darstellungen*; *podstawa*, *Grund.*

[6] *proste prawdy*, *einfachen Wahrheiten*; *prawdy podstawowe*, *Grundsätze*, dosłownie: *zdania podstawowe*; *aksjomaty*, *Grundwahrheiten*, dosłownie: *podstawowe prawdy.*

[7] Pierwsza prawda dotyczy linii (Linie), druga – funkcji (Funktion).

[8] *przejście, Überganges; stan niebytu, Nichtvorhandenseyns.*

[9] Funkcję należy tu rozumieć jako funkcję wielomianową jednej zmiennej rzeczywistej.

[10] *rozkład, Zerlegbarkeit; wyprowadzenie, Herleitung; rozważania, Betrachtungen.*

[11] Mowa tu o pracy: C. F. Gauss, *Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicum rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse*, Getynga 1816.

[12] *Równanie stopnia nieparzystego jest z pewnością rozwiązywalne.*

[13] Chodzi o zagadnienia wyznaczenia: długości krzywej, kwadratury figury, czyli pola powierzchni, oraz objętości bryły.

[14] Mimo że Bolzano w całej pracy używa słowa *szereg, Reihe*, paragrafy 1–5 i częściowo 9 traktują o ciągach.

***

Tłumaczenie: Marlena Fila

Przedkładane tłumaczenie pracy *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der gleichung liege* zostało przygotowane przez Marlenę Fila. Jest to pierwsze tłumaczenie tej rozprawy na język polski. W pracy nad przekładem Autorka wspierała się także tłumaczeniem na język angielski zamieszczonym w książce *The mathematical Works of Bernard Bolzano* pod redakcją Steve'a Russa.

*Instytut Matematyki*
*Uniwersytet Pedagogiczny*
*ul. Podchorążych 2*
*PL-30-084 Kraków*
*e-mail* marlena-fila@wp.pl