FOLIA 273

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 10(2018)

ISSN 2080-9751
DOI 10.24917/20809751.10.12
Historia matematyki, Konferencje

Marlena Fila

Recenzja: Lukas Benedikt Kraus *Der Begriff des Kontinuums bei Bernard Bolzano*. Academia Verlag. Sankt Augustin, 2014*

* * *

1. W filozofii greckiej ciągłość charakteryzowano jako to, *co jest podzielne na części, które są nieskończenie podzielne.*[1] Taką charakterystykę odnoszono do obiektów geometrycznych, a także do czasu i ruchu. W geometrii greckiej znajdujemy nawet dowody nieskończonej podzielność odcinków; tak na przykład można interpretować twierdzenie I.9 czy VI.9 *Elementów* Euklidesa. Z kolei jako dyskretne rozumiano obiekty złożone z niepodzielnych monad. Modelowym przykładem są liczby (naturalne); według definicji VII.2 Elementów *Liczba to wielość monad.*

Takie rozumienie ciągłości funkcjonowało do XIX wieku. W pracach Bernarda Bolzana rozszczepia się ono na trzy różne znaczenia: (1) ciągłość liczb rzeczywistych, (2) ciągłość funkcji, (3) kontinuum topologiczne.

(Ad. 1) W rozprawie *Rein analytischer Beweis* (1817) Bolzano wielokrotnie wykorzystywał ciągłość liczb rzeczywistych. W pracy sformułowana jest m.in. zasada supremum oraz zupełność w sensie Cauchy'ego i aksjomat Archimedesa.[2] Bolzano nie miał co prawda jasności co do statusu metodologicznego tych zasad, próbował na przykład dowodzić zasadę supremum, jednakże to jemu właśnie należy przypisać pierwszeństwo w uznaniu fundamentalnej roli tych zasad.

(Ad. 2) W tej samej rozprawie Bernard Bolzano podaje definicję ciągłości funkcji. Pisze: „funkcja fx zmienia się zgodnie z prawem ciągłości dla wszystkich wartości x wewnątrz lub na zewnątrz pewnych granic oznacza po prostu, że jeżeli x jest jakąś wartością, to różnica $f(x+\omega)-fx$ może stać się mniejsza niż każda dana wielkość pod warunkiem, że ω może być dowolnie mała. Czyli $f(x+\omega) = fx+\Omega$."

*Review of Lukas Benedikt Krauss *Der Begriff des Kontinuums bei Bernard Bolzano*

[1] „Wszystko ciągłe jest podzielne na te, które są podzielne na zawsze podzielne" – Arystoteles, *Physica*, cyt. za: Błaszczyk, Mrówka, 2013.

[2] Więcej o aksjomacie ciągłości w (Bolzano, 1817) zob. (Fila, 2017).

Otto Stolz, powołując się na Bolzana, jako definicję ciągłości funkcji podaje następującą formułę:[3]

„Jednoznaczna funkcji $f(x)$ zdefiniowana dla wszystkich wartości x z przedziału $(a-d, a+d) - d > 0$_ nazywa się dla skończonej wartości $x = a$ ciągłą], gdy dla skończonych podejść granicznych

$$\lim x = a \pm 0 \quad \lim f(x) = f(a),$$

tzn. do każdej liczby $\varepsilon > 0$ musi należeć liczba $\delta > 0$ tego rodzaju, że

$$| f(x) - f(a) | < \varepsilon$$

gdy tylko $| x - a | < \delta$."

Faktycznie takie rozumienie ciągłości znajduje się w *Rein analytischer Beweis*, ale nie w samej definicji Bolzana, lecz w dowodach twierdzeń, m.in. w dowodzie twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośredniej przez funkcję ciągłą.

(Ad. 3) Książka Lucasa Benedikta Krausa *Der Begriff des Kontinuums bei Bernard Bolzano* jest poświęcona wyłącznie trzeciemu znaczeniu ciągłości: definicji kontinuum. Zdaniem autora definicja Bolzana zajmuje ważne miejsce w historii pojęcia kontinuum.

2. Monografia Krausa opublikowana została w serii *Beiträge zur Bolzano-Forschung*. W serii tej ukazało się do tej pory prawie trzydzieści prac związanych z filozofią i logiką Bolzana oraz jego pracami matematycznymi. W przedmowie autor zwraca uwagę na to, że nie było dotąd krytycznej dyskusji o interpretacji pojęcia kontinuum podanego przez Bolzana. Kraus stawia tezę, że we wszystkich pracach, w których Bolzano wspomina pojęcie kontinuum, reprezentuje on spójną koncepcję tego pojęcia mimo pewnych niespójności terminologicznych. Ponadto, pisze Kraus, koncepcja Bolzana różni się zasadniczo zarówno od współczesnego pojęcia zbioru gęstego [in sich dichten Menge], jak i od pojęcia kontinuum Cantora.

Monografia składa się z sześciu rozdziałów oraz dodatku, który jest uzupełnieniem rozdziału trzeciego. Pierwszy rozdział książki poświęcony jest komentarzowi o tekstach źródłowych. Definicję kontinuum Bolzana odnajduje Kraus w nastepujących tekstach:
(1) *Über Haltung, Richtung, Krümmung und Schörkelung bei Linien sowohl als Flächen sammt einigen verwandten Begriffen* (1948),
(2) *Wissenschaftslehre* (1837),
(3) *Paradoxien des Unendlichen* (1851),
(4) *Versuch einer Erklärung der Begriffe von Linie, Fläche und Körper* (2001).

Rozdział drugi poświęcony jest pojęciu kontinuum u Bolzana. To tam Kraus podaje odtworzoną przez siebie na podstawie tekstów źródłowych definicję kontinuum Bolzana oraz definicję punktu izolowanego:

„Podzbiór A przestrzeni metrycznej nazywamy (*Bolzanowskim) kontinuum*, gdy dla każdego punktu p z A istnieje liczba rzeczywista $\varepsilon > 0$ taka, że dla każdego

[3](Stolz, 1885, s. 179)

$\eta \in (0, \varepsilon]$ zawsze znajduje się co najmniej jeden punkt q z A, którego odległość od p wynosi dokładnie η:

$$\forall p \in A\, \exists \varepsilon > 0\, \forall \eta \in (0, \varepsilon]\, \exists q \in A\, (d(p, q) = \eta).''$$

„Punkt p podzbioru A przestrzeni metrycznej nazywamy *punktem izolowanym* (*w sensie Bolzana*) zbioru A, gdy dla każdej liczy rzeczywistej $\varepsilon > 0$ istnieje $\eta \in (0, \varepsilon)$ taka, że żaden punkt zbioru A nie znajduje się dokładnie w odległości η od p:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \eta \in (0, \varepsilon)\, \forall q \in A\, (d(p, q) \neq \eta).''$$

Autor zwraca także uwagę na problem terminologiczny związany z definicją kontinuum - Bolzano w różnych pracach definiuje ten sam obiekt, lecz używa przy tym różnych pojęć na jego nazwanie. Ostatecznie Kraus stwierdza:

„Kontinuum jest (przestrzenna, czasowa lub materialna) składająca się z punktów całość, która nie zawiera w sobie żadnych punktów izolowanych".

W rozdziale trzecim Kraus dokonuje porównania definicji Bolzana z definicjami współczesnymi. Ostatecznie stwierdza, że: (1) Pojęcie kontinuum Bolzana jest węższe niż pojęcie zbioru gęstego. (2) Współczesne pojęcie kontinuum jest nieodpowiednie dla porównania z pojęciem Bolzana. (3) Bolzana pojęcie kontinuum jest szersze niż pojęcie Cantora, względnie Hausdorffa. (4) Kontinua Bolzana nie muszą być ani spójne ani zwarte. (5) Kontinua Bolzana zawierają nieprzeliczalnie wiele punktów. (6) Definicja punktu izolowanego, którą podał Bolzano jest szersza niż współczesna definicja tego pojęcia.

Rozdział trzeci opatrzony jest umieszczonym na końcu monografii dodatkiem, w którym udowodnione zostaje m.in., że: (a) kontinua Bolzana są dokładnie tymi podzbiorami przestrzeni metrycznej, które nie mają punktów izolowanych w sensie Bolzana; (b) każdy punkt Bolzana kontinuum A jest punktem skupienia tego zbioru; (c) każde niezdegenerowane kontinuum Hausdorffa jest kontinuum w sensie Bolzana; (d) każdy punkt izolowany jest punktem izolowanym w sensie Bolzana.

Czwarty rozdział książki poświęcony jest pojęciu kontinuum w filozofii Bolzana z uwagi m.in. na to, że w Pracach *Paradoxien* oraz *Wissenschaftslehre* pojęcie kontinuum zostało umieszczone w wyraźnym kontekście metafizycznym. Kolejny rozdział poświęca Kraus na obszerne omówienie interpretacji innych autorów. Wśród komentatorów Bolzanowskiego pojęcia kontinuum wymienia m.in. Cantora, van Rootselaara i Berga. Rozdział szósty, ostatni, jest podsumowaniem rozdziału piątego. Kraus formułuje w nim szereg wniosków, w tym dwa wnioski ogólne: (1) Definicja kontinuum podana przez Bolzana dała początek rozwojowi tego pojęcia, dlatego interpretacja jego definicji winna odbywać się na tle pojęć późniejszych. Różnice w interpretacjach pojęcia kontinuum Bolzana polegają głównie na jego porównaniu z pojęciami późniejszymi. (2) Wskazówką do poprawnej rekonstrukcji pojęć wprowadzanych przez Bolzana jest jego motywacja filozoficzna.

3. Uwagi końcowe. We współczesnej topologii kontinuum definiowane jest jako zbiór zwarty i spójny. Klasyczna topologia z kolei nadbudowana jest na teorii mnogości, jest więc nauką o obiektach złożonych z punktów. Wydaje się, że Bolzano ma

pierwszeństwo i w tej dyscyplinie W pracy *Betrachtungen über einige Gegenstände der Elementargeometrie* z 1804 roku zdefiniował linię prostą jako obiekt złożony z punktów:

„Definicja. Obiekt, który zawiera wszystkie i tylko te punkty, które leżą między dwoma punktami a i b, nazywany jest linią prostą między a i b."[4]

Według Krausa kontinuum Bolzana jest podzbiorem przestrzeni metrycznej. Pojęcie przestrzeni metrycznej *explicite* wprowadził do matematyki Maurice Frecjet w 1905 roku. Interpretacja Krausa oparta jest na stosowaniu przez Bolzana pojęcia ciągłości. Nie odważymy się przesądzać, czy interpretacja Krausa jest zbyt odważna. Niemniej jednak można zauważyć, że u podstaw greckiego rozumienia ciągłości leży wprowadzone przez Bolzana idea obiektów geometrycznych jako złożonych z punktów.

Literatura

Błaszczyk, P., Mrówka, K.: 2013, Euklides i Arystoteles o ciągłości, cz. 1: Euklides, *Filozofia Nauki* **4**(84), 91–115.

Bolzano, B.: 1817, *Rein analytischer Beweis das Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigsten eine reelle Wurzel der Gleichung Liege*, Gottlieb Hasse, Praga.

Dadaczyński, J.: 2018, Bernard Bolzano: pierwsze (historycznie) matematyczne ujęcie pojęcia kontinuum, *Zagadnienia filozoficzne w nauce* **64**(2018), 195–199.

Fila, M.: 2017, Aksjomat ciagłości w rozprawie Bernarda Bolzana Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung Liege, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **9**, 37–48.

Kraus, L. B.: 2014, *Der Begriff des Kontinuums bei Bernard Bolzano*, Academia Verlag, Sankt Augustin.

Russ, S.: 2004, *The mathematical works of Bernard Bolzano*, Oxford University Press.

Stolz, O.: 1885, *Vorlesungen über allgemeine Mathematik*, B. G. Teubner, Lipsk.

Instytut Matematyki
Uniwersytet Pedagogiczny
ul. Podchorążych 2
PL-30-084 Kraków
e-mail: marlena.fila@up.krakow.pl

[4](Russ, 2004, s. 76)