FOLIA 273

Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis

Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia 10(2018)

ISSN 2080-9751
DOI 10.24917/20809751.10.6

Wojciech Krysztofiak

Czy kompetencja arytmetyczna jest uwarunkowana kulturowo?*

Abstract. The purpose of this essay is not to answer the question posed in the title, but to specify the "preconditions" for the defense of two opposing stances: mathematical culturalism and mathematical anticulturalism. The names of these stances are not present in the source literature. Introducing them to the debate on the nature of the relationship between expert mathematical knowledge and its folk counterpart is justified, because the dispute concerns i.a. the cultural status of mathematical discourse - especially due to the fact that the acceptance of one of the stances results in rejecting various models of teaching arithmetic in school, considering them incompatible with the stance taken in the dispute. The presented essay does not, however, focus on the strategies, methods, or transfer & teaching techniques concerning mathematics in public education systems.

1. Kulturalizm matematyczny *versus* antykulturalizm matematyczny

Kulturalizm matematyczny jest stanowiskiem głoszącym, że teorie matematyczne stanowią formę metaforycznych artefaktów kulturowych, wytworzonych przez ludzi w celu, opisu ich codziennego doświadczenia, dzięki strukturom pojęciowym (schematom, ramom, formom, „złączom" (blends), metaforom, itd.) zakodowanym w ludzkim umyśle w wyniku procesów ewolucji kulturowej. Zwolennicy kulturalizmu matematycznego uważają, iż każda formacja kulturowa posiada jakąś postać matematyki, że matematyka jest wytworem ludzkiej wyobraźni, że jest twórcza i otwarta, że nie stanowi monolitu i że nie można przewidzieć jej rozwoju. Kulturalizm matematyczny jest niekiedy wzmacniany koncepcją matematyki ucieleśnionej, według której pojęcia matematyczne powstają jako efekt interakcji

*Is numeracy culturally conditioned?

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 97D20; Secondary: 97F20

Keywords and phrases: numeracy, culturalism in mathematics, anti-culturalism in mathematics, cognitive science

naszego ciała i mózgu (systemu neuronalnego) ze środowiskiem fizycznym, biologicznym, społecznym i kulturowym.[1]

Kulturalizm matematyczny jest łączony ze stanowiskiem, według którego nie istnieje jakaś odrębna dziedzina obiektów poznania arytmetycznego. Świat posiada swoje regularności, ale to, że pojęcia matematyczne stosują się do nich, nie jest wynikiem tego, że świat jest matematyczny. Pojęcia matematyczne (jako schematy, ramy, metafory, struktury pojęciowe) są narzucane na to, co jest doświadczane, stanowiąc narzędzie opisu ludzkiego doświadczenia.

Fundamentem stanowiska kulturalizmu matematycznego jest więc twierdzenie o nieistnieniu przedmiotów poznania matematycznego i zgoda na redukcję matematyki do sposobu opisu naszego doświadczenia życiowego. Kulturaliści matematyczni uważają, iż (i) przedmioty matematyczne nie istnieją w światach Platońskich (gdyż takich najzwyczajniej nie ma), że (ii) przedmioty matematyczne nie istnieją jako własności matematyczne obiektów w światach fizycznych, że (iii) przedmioty matematyczne nie są konstruowane jako byty idealne lub intencjonalne przez podmiot poznający (antykonstruktywizm), że (iv) przedmioty matematyczne nie istnieją jako przedstawienia psychiczne (antyidealizm subiektywny). Przedmiotów poznania matematycznego po prostu nie ma. Formuły matematyczne, mające postać twierdzeń, tworzą wyłącznie rozmaitość sposobów opisu doświadczanego świata. Niektóre pojęcia matematyczne nie doczekały się jeszcze swojej aplikacji w praktykach opisu doświadczanego świata. Czekają jednak one na takie zastosowanie.

Antykulturalizm matematyczny jest stanowiskiem głoszącym, że pojęcia matematyczne odwzorowują przedmioty poznania matematycznego: bądź jako istności idealne (platonizm, konstruktywizm platoński), bądź jako istności psychiczne lub intencjonalne (idealizm subiektywny lub transcendentalny), albo jako własności, relacje lub struktury, w jakie uwikłane są istności świata fizycznego (realizm matematyczny).[2] Choć wymienione stanowiska filozoficzne pozostają względem

[1]Stanowisko kulturalizmu matematycznego jest przyjmowane przez postmodernistów. Jego współczesną wersją jest koncepcja matematyki ucieleśnionej, której prezentacje można znaleźć w pracach: Lakoff G, Núñez R. E (2000) oraz Núñez R. E (2011). W drugiej z wymienionych prac, dopuszcza się stanowisko minimalnego natywizmu, zgodnie z którym umysł dysponuje pewnym residuum wrodzonych reprezentacji arytmetycznych, umożliwiających mu przeprowadzanie subityzacji. Krytycznemu omówieniu koncepcji matematyki ucieleśnionej są poświęcone takie prace, jak na przykład: Pogonowski (2011), (2017), Hohol (2011).

[2]Najbardziej reprezentatywnym zwolennikiem antykulturalizmu matematycznego był Gödel. Według niego, przedmioty badania matematycznego są transcendentne względem sposobów ich reprezentowania językowego w teoriach matematycznych. Istnieją one realnie. Podmiot poznający niczego do nich nie dodaje w procesie ich poznawania. Przedmioty matematyczne istnieją również niezależnie od uniwersum fizycznego. Głównym źródłem poznania matematycznego jest intuicja rozumiana jako zdolność ujmowania przedmiotów matematycznych i tworzenia pojęć odwzorowujących uniwersum matematyczne. Intuicja matematyczna nie stanowi jakiegoś mistycznego źródła poznania; może ona dostarczać błędnych rezultatów. Dlatego intuicja jest korygowalna. Matematyka rozwija się kumulatywnie. Na temat poglądów Gödla, zob. Murawski (1995, s. 138-140), Wójtowicz, (2003, s. 256–268). Innym przedstawicielem antykullturalizmu matematycznego jest Heller. Według tego filozofa, wszechświat posiada własność matematyczności M. Przedmiotem matematyki jest właśnie poznanie tej własności wszechświata poprzez tworzenie teorii matematycznych przez małe „m” – teorii „matematyki ludzkiej”. Hellera M stanowi odpowiednik absolutnego uniwersum matematycznego z koncepcji Gödla. Różnica miedzy obu filozofami sprowadza się do tego, że Heller uważa, że M jest we wszechświecie fizycznym, zaś dla Gödla M stanowi uniwer-

siebie w relacji konkurencji, to jednak można je zaklasyfikować jako „podpadające" pod wspólny hiper-paradygmat filozoficznej refleksji nad dyskursem matematycznym. Wszystkie one zakładają, że matematyka posiada swój przedmiot poznania (różnie rozumiany na gruncie wymienionych stanowisk) i dlatego matematyka nie redukuje się do sposobów opisu doświadczenia życiowego gatunku ludzkiego.

Fundamentem stanowiska antykulturalizmu matematycznego jest stwierdzenie, iż poznanie przedmiotów matematycznych polega na ich odkrywaniu (lub konstruowaniu wedle ściśle określonych reguł) oraz odkrywaniu (konstruowaniu) systemów (struktur) relacji, w jakie są one uwikłane. W świetle antykulturalizmu matematycznego, uprawianie matematyki sprowadza się do tworzenia reprezentacji językowych matematycznej rzeczywistości (obiektywnej lub intersubiektywnej albo konstruowanej jako obiektywna lub intersubiektywna) wedle określonych wzorców metodologicznych (posługiwania się rekurencyjnie obliczalnym językiem oraz technikami dowodzenia).

Podstawowa różnica pomiędzy szkicowo charakteryzowanymi stanowiskami filozoficznymi sprowadza się do następujących wyznaczników: (i) zgodnie z kulturalizmem matematycznym, uprawianie matematyki przypomina aktywność w dziedzinie sztuki, a więc tworzenia artefaktów; zgodnie z antykulturalizmem matematycznym uprawianie matematyki polega na językowym tworzeniu pewnej dziedziny przedmiotowej spełniającym określone wymogi odwzorowania (reprezentacji); (ii) zgodnie z kulturalizmem, sukces w uprawianiu matematyki polega na jej skuteczności – czyli na użyciu formuł matematycznych w opisie doświadczenia, podczas gdy według antykulturalistów ten sukces sprowadza się do udowodnienia prawdziwości twierdzeń matematycznych; (iii) według kulturalistów czynnikiem wpływającym na rozwój „sztuki matematycznej" są ludzkie zdolności kreowania metafor pojęciowych, zaś według antykulturalistów tym czynnikiem jest kompetencja w zakresie tak zwanej matematyki eksperckiej, rozumiana jako zdolność do odkrywania (lub konstruowania) obiektów matematycznych, intuicyjnego uchwytywania relacji zachodzących pomiędzy nimi oraz zdolność do przeprowadzania dowodów.

Akceptacja któregoś z dyskutowanych stanowisk rzutuje na konstruowanie modeli dydaktycznych nauczania matematyki. Kulturaliści będą opowiadali się za technikami nauczania matematyki w kontekście innych dyscyplin wiedzy w ramach tak zwanego nauczania holistycznego, podczas gdy antykulturaliści będą akcentowali potrzebę wyodrębnienia w procesie dydaktycznym modułu nauczania matematyki z uwagi na osobliwość jej przedmiotu poznania. Ponadto, kulturaliści będą optowali za technikami przekazu treści matematycznych w kontekście treści doświadczenia codziennego w przeciwieństwie do antykulturalistów akcentujących wagę technik przekazu abstrakcyjnego – czyli ścisłego, formalnego, dedukcyjnego, odizolowanego od języka intensjonalnego. Wreszcie, kulturaliści będą dyskurs matematyczny wartościowali na równi z innymi dyskursami, podczas gdy

sum platońskie, rzutowane na materię fizyczną. Zob. Heller (2006, 2010). Inną wersję antykulturalizmu proponuje Błaszczyk (2007, s. 161–178). Według tego autora, przedmioty matematyczne mają charakter intencjonalny w sensie Ingardena. Są schematyczne, posiadają dwuwarstwową budowę oraz miejsca niedookreślenia. Przedmioty matematyczne są stwarzane, ale nie w sposób dowolny, lecz wedle określonych zasad pracy matematycznej. Stanowisko Błaszczyka jest bliskie ideom konstruktywizmu matematycznego.

antykulturaliści będą czynili z niego egzemplifikację najwyższej wartości poznawczej, jaką jest prawda w sensie logicznym (w rozumieniu Tarskiego teorii prawdy lub w rozumieniu prawdy jako dowodliwości).[3]

W aspekcie społeczno-politycznym kulturaliści podkreślają fakt, iż implementowanie ich modeli dydaktycznych do systemu edukacji powszechnej blokuje społeczne procesy tworzenia się uprzywilejowanej warstwy społecznej technokratów oraz warstwy społecznej osób wykluczonych matematycznie. Z tego punktu widzenia, implementacja antykulturalistycznych modeli dydaktycznych nauczania matematyki potęguje procesy wykluczenia społecznego osób nie radzących sobie z matematyką, wytwarza warstwę społecznych „outsiderów" oraz hierarchizuje społeczeństwa. Modele dydaktyczne „matematyki ucieleśnionej" minimalizują, według kulturalistów, opresyjny aspekt nauczania matematyki.[4]

2. Kulturalizm arytmetyczny w aspekcie badań kognitywnych nad kompetencją obliczeniową

Kto w przedstawionym sporze, przejawiającym się w nader ważnych płaszczyznach publicznych (nawet w polityce), ma rację? Czy kulturaliści czy antykulturaliści arytmetyczni? W proponowanych argumentach na rzecz swojego stanowiska w odniesieniu do arytmetyki, kulturaliści matematyczni powołują się na eksperymentalne badania kognitywistyczne nad naszymi zdolnościami obliczeniowymi, szczególnie na eksperymenty wywołujące efekt SNARC.[5] Pomijając szczegóły ich

[3] W pracy Nńñez (2000), sformułowane zostały dezyderaty opisujące metody nauczania matematyki zgodne z koncepcją matematyki ucieleśnionej. Autor ten, między innymi, stwierdza: "«Being good at mathematics» doesn't necessarily mean being good at doing calculations and running algorithms. It means knowing how to keep one's metaphors straight, when to operate with the appropriate metaphors, when to shift from one to another one, when to combine them, and so on. Teaching how to master this conceptual gymnastics should be a goal for mathematics education" (s. 19). Istotą tego podejścia jest unikanie w nauczaniu matematyki dowodów, praktyk rekurencyjnych, obliczania. Nauczanie „ucieleśnionej matematyki" powinno motywować uczniów do kreowania metafor matematycznych – matematyka winna być nauczana w kontekście historii, filozofii, psychologii i sztuki.

[4] Teoretycy edukacji zwracają uwagę – z inspiracji filozofii Foucault – na tak zwane, niewidzialne, ukryte programy nauczania (pedagogie), których jednym z celów ich funkcjonowania jest wpływ na procesy replikacji klasowych struktur społecznych lub procesy utwierdzania się (zakorzeniania się) aktualnej struktury władzy (Bernstein (1990), na przykład, akcentuje role tzw. kodów edukacji w tym procesie, profilujących systemy transmisji wiedzy, a więc kontekstu przekazu wiedzy). Edukacja matematyczna jest postrzegana w tym paradygmacie uprawiania teorii edukacji jako jeden z kluczowych czynników wytwarzania klas społecznych: upośledzonych (wykluczonych) oraz władczych. Model przekazu matematyki w edukacji szkolnej może wzmacniać postawy konformizmu społecznego wśród przedstawicieli klas upośledzonych (pod wpływem edukacji matematycznej stajemy się mniej buntowniczy, mniej skłonni do zachowań rewolucyjnych). Na temat edukacji matematycznej w kontekście mechanizmów odtwarzania struktur społecznych (władzy, klasowych, itd.), zob. Cotton, Hardy (2004)

[5] Efekt SNARC jest rozumiany jako zjawisko asocjacji względnych wielkości liczbowych ze stronami w przestrzeni, wywoływane w szczególnego rodzaju eksperymentach. Typowym wskaźnikiem tego efektu jest różnica w czasach reakcji na bodziec liczbowy pomiędzy prawą i lewą ręką lub nogą. Czas reakcji lewą ręką na liczebniki względnie małe jest krótszy niż czas reakcji prawą ręką te same liczebniki z danego przedziału numerycznego oraz czas reakcji prawą ręką na liczebniki względnie duże z danego przedziału jest krótszy niż czas reakcji na nie lewą ręką. Efekt SNARC opisuje funkcja o postaci: SNARC(n) = RTR(n) - RTL(n). Efekt SNARC może posiadać różne natężenie, różny zwrot (z prawa na lewo lub odwrotnie, z góry do dołu

argumentów na pochodzenie konstrukcji arytmetycznych, ich schemat argumentacyjny w odniesieniu do liczb naturalnych można przedstawić następująco: (i) badania eksperymentalne pokazują, że niemowlaki już odróżniają na swojej zmysłowej scenie świata liczności dwóch lub trzech obiektów; podobne badania pokazują, że również zwierzęta mogą niesymbolicznie obliczać nawet 5–6 obiektów; (ii) fakt ten wskazuje, iż ludzki umysł posługuje się jakimś wrodzonym schematem pojęciowym obliczania, umożliwiającym mu tzw. subityzację (czyli bezpośrednie uchwytywanie w każdej sytuacji empirycznej trzech lub czterech obiektów); (iii) umysł ludzki posługuje się schematem: źródło – droga – cel, który służy mu do wytwarzania różnych metafor poruszania się po drodze; (iv) badania eksperymentalne wywołujące efekt SNARC pokazują, że podczas liczenia w umyśle aktywują się reprezentacje osiowe (mentalne osie liczbowe), które są interpretowane jako właśnie schemat: źródło – droga – cel; (v) następnie na schemat ten nakładamy schemat spoczynku punktu w procesie jego poruszania się wzdłuż drogi, tworząc w ten sposób pojęcie liczby jako punktu na drodze (linii); (vi) aby wygenerować wiele liczb naturalnych, na tak skonstruowaną metaforę nakładamy schemat powtórzenia działania, uzyskując porządek liczb jako porządek kolejnych punktów spoczynku w procesie poruszania się po drodze. W podobny sposób, poszukując źródłowych metafor pojęciowych, kulturaliści arytmetyczni wyjaśniają pochodzenie, na przykład, takich pojęć arytmetycznych, jak nieskończoność, ciągłość, liczby rzeczywiste, itd.

W argumentacji kulturalistów ukryte jest założenie, według którego kompetencja w zakresie arytmetyki eksperckiej rozwija się na bazie kompetencji w zakresie arytmetyki ludowej (mentalnej, kognitywnej). Innymi słowy, kulturaliści zakładają, że arytmetyka Peano powstaje w wyniku przekształcenia teorii mentalnych osi liczbowych, która jest zakodowana w naszym umyśle (jako określonego rodzaju wzorzec aktywacji określonych grup neuronów) i do której podmiot nie posiada dostępu introspekcyjnego. Założenie to jest niefalsyfikowalne eksperymentalnie. Nie wiadomo bowiem, jaką miałby przyjąć postać eksperyment obalający wyspecyfikowane założenie. Arytmetyka Peano jest bowiem teorią nieskończonej osi liczbowej, podczas gdy teoria(e) mentalnych osi liczbowych jest(są) teorią(mi) osi skończonych. W żaden sposób nie da się eksperymentalnie wywołać efektu nieskończenie długiej osi liczbowej. W konsekwencji nie da się eksperymentalnie pokazać tego, że zachodzi jakiś proces w mózgu transformowania się struktur neuronalnych reprezentujących skończone, mentalne osie liczbowe na strukturę neuronalną reprezentującą oś liczbową Peano.

Można jednak skonstruować formalny model pokazujący, jak nośniki (schematy poznawcze) reprezentacji numerycznych (liczb oraz liczebników zarówno werbalnych jak i cyfrowych), stojących u podstaw ludzkiego liczenia na gruncie arytmetyki ludowej, przekształcają się w jeden z modeli (model osiowy) aryt-

---

lub odwrotnie), pojawia się w wyniku działania zarówno liczebników symbolicznych (werbalnych oraz cyfrowych) jak i niesymbolicznych; eksponowanych wzrokowo, słuchowo, a nawet dotykowo. Na temat tego efektu napisano setki artykułów. Zob. na przykład: Dehaene, Bossini, Giraux (1993), Zebian (2005), Nuerk, Wood, Willmes (2005), Patro, Haman (2012), Patro, Krysztofiak (2013), Krysztofiak, (2016a). Na zjawisko kojarzenia liczb naturalnych z linią zwrócił już uwagę Galton (1880), twierdząc, iż badane osoby często wyobrażają sobie liczby jako rozmieszczone na osi o zwrocie z lewa na prawo.

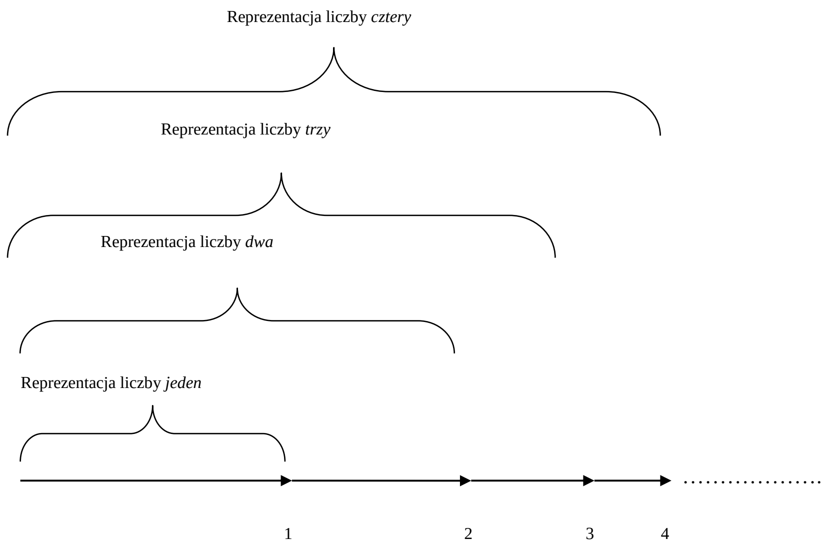
metyki PA. W ramach badań w zakresie tak zwanej arytmetyki kognitywnej[6], wyróżnia się kilka modeli schematów poznawczych generujących reprezentacje numeryczne: modele sumacyjnych osi liczbowych z zerem oraz bez zera (SOL)[7] modele punktowo-miejscowych osi liczbowych (PMOL) oraz modele punktowych osi liczbowych (POL).[8]

Osie typu SOL mają być nośnikami reprezentacji numerycznych, stojących u podstaw czynności obliczeń aproksymacyjnych („na oko", w przybliżeniu), których językowymi manifestacjami są wypowiedzi takie, na przykład, jak: *jest (było) około n obiektów, na oko jest (było) n obiektów*. Reprezentacjami numerycznymi generowanymi z osi liczbowych typu SOL są wówczas „odcinki" tych osi zaczynające się na punkcie początkowym i kończące się na odpowiednim n-tym punkcie. Reprezentacje kolejnych liczb pozostają względem siebie w relacji bycia częścią lub (używając języka teorii mnogości) w relacji zawierania się. Reprezentacja liczby 1 zawiera się w reprezentacji liczby 2, a ta z kolei – w reprezentacji liczby 3, itd. Odległości pomiędzy końcowymi punktami reprezentacji kolejnych liczb podpadają pod skalę logarytmiczną. Następujący diagram przedstawia graficznie osie typu SOL:

[6] Termin „arytmetyka kognitywna" został wprowadzony w pracy (Ashcraft, 1992) dla oznaczenia kompetencji obliczeniowej (numerycznej). Tę kompetencję można rozumieć w kategoriach czynnościowych jako obejmującą zdolności do wykonywania intencjonalnych aktów referencji do: liczb kardynalnych, liczb porządkowych oraz wielkości. Inni badacze, pod wpływem pracy (Dehaene, 2001), używają terminu „zmysł liczby" (number sense), aby podkreślić fakt permanentnego nastawienia ludzkiego umysłu na odbiór bodźców numerycznych ze środowiska. Tak, jak za pomocą zmysłu wzroku odbieramy nieustannie bodźce optyczne, tak też za pomocą zmysłu liczby permanentnie odbieramy bodźce numeryczne. Zob. na temat zmysłu liczby czy też kompetencji obliczeniowych: Giaquinjto (2001), Berch (2005).

[7] Sumacyjne osie liczbowe mają stanowić nośniki reprezentacji liczbowych, których aktywacja jest odpowiedzialna za efekty torowania reakcji na bodźce numeryczne. W eksperymencie opisanym w pracy Roggemann, Verguts, Fias (2007), uczestnicy mieli za zadanie nazywać liczby z przedziału 1–5, eksponowane na dwa sposoby: symbolicznie (cyfrowo) oraz niesymbolicznie (jako kropki). Główny bodziec był poprzedzany bodźcem torującym, trwającym około 83 ms tak, aby badana osoba nie była w stanie na niego zareagować. W wypadku poprzedzania ekspozycji głównego (niesymbolicznego) bodźca docelowego bodźcem torującym, zauważono przyspieszenie reakcji rozpoznających bodziec docelowy, którego wartość była mniejsza lub równa wartości bodźca torującego.

[8] Model formalny przekształcania się osi SOL na osie PMOL, a te na osie POL został przedstawiony w pracy (Krysztofiak, 2016b). Mechanizmem odpowiedzialnym za przekształcanie się tych osi jest funkcja intencji obliczeniowej odpowiedzialna za procesy uwagi. Im wyższe natężenie uwagi, tym wyższe wartości przyjmuje funkcja intencji obliczeniowej.



Model osi liczbowych typu SOL ma wyjaśniać: (i) efekt SNARC; (ii) efekt skali polegający na tym, że w spontanicznych operacjach „rozmieszczania liczb na osiach", osoby badane wykonują takie zadanie w ten sposób, że początkowe liczby z danego przedziału liczb rozmieszczają w odległościach względnie dużych, podczas gdy końcowe liczby z danego przedziału w odległościach względnie małych (odległość pomiędzy 1 a 2 na osi jest większa od odległości pomiędzy 2 i 3, a odległości, pomiędzy 8 i 9 oraz 9 i 10, są małe i nieodróżnialne percepcyjnie); (iii) efekty błędów (zwane zwykle efektami dystansu) oszacowywania liczności polegające na tym, iż umysł liczący zwykle się nie myli w szacunkowych obliczeniach („na oko") liczności w przedziale <1, 4>, podczas gdy w miarę wzrostu wartości liczności prawdopodobieństwo błędu w obliczeniach szacunkowych (aproksymacyjnych) wzrasta (łatwiej jest pomylić się w obliczeniach na liczbach z przedziału np. <30, 35>, niż z przedziału <10, 15>); (iv) efekt torowania polegający na tym, że torujący bodziec liczbowy o wartości większej niż pewna liczność n przyspiesza operacje zliczania liczebności mniejszych lub równych n; (v) zdolność do subityzacji; (vi) fakt późniejszego w rozwoju nabywania przez umysł umiejętności posługiwania się liczbą oraz liczebnikiem zerowym.

Na osiach typu SOL bez zera określona jest tylko operacja ich przedłużania, podczas gdy na osiach typu SOL z zerem dodatkowo jest określona operacja skracania. Umysł formatuje osie typu SOL z zerem w późniejszej fazie rozwoju, niż faza, w której formatowane są osie typu SOL bez zera. Wraz z rozwojem zdolności kontroli natężenia uwagi, umysł nabywa dyspozycję do transformowania osi typu SOL z zerem na osie punktowo-miejscowe, które są nośnikami reprezentacji numerycznych w aktach odnoszenia się do liczebności przy pomocy liczebników. Osie punktowo-miejscowe PMOL są tak sformatowane, że reprezentacje numeryczne w początkowym segmencie osi przyjmują kształt punktów (co ma wyjaśniać zdolność umysłu do subityzacji), podczas gdy reprezentacje kolejnych liczebności przyjmują kształt odcinków (miejsc) na osi punktowo-miejscowej. Wraz z odległością od reprezentacji liczby zero (reprezentacji początkowej), miejsca reprezentujące kolejne liczebności są coraz większe (co ma wyjaśniać wzrost prawdopodobieństwa błędu obliczeniowego przy liczebnikach o względnie wysokich wartościach). Z każdą osią typu PMOL skojarzona jest funkcja intencji obliczeniowej. Im wyższą wartość ona przyjmuje, tym początkowy, punktowy segment osi jest dłuższy. Idealizacją osi typu PMOL są osie czysto punktowe typu POL. Wówczas wartość funkcji intencji obliczeniowej dąży do nieskończoności. Detektory liczebności, dla których funkcja intencji obliczeniowej przyjmuje wysokie wartości, są w stanie subityzować zbiory obiektów o względnie wysokiej liczbie kardynalnej.

To, że możliwe jest skonstruowanie zunifikowanego modelu schematów osiowych reprezentacji numerycznych, nie oznacza, że rzeczywiście w mózgu przebiegają procesy transformowania się implementacji neuronalnych osi typu SOL na implementacje osi typu PMOL oraz POL. Co więcej, nie wiadomo czy tego rodzaju osie uczestniczą w procesach obliczeniowych, jakich uczniowie dokonują, ucząc się operacji arytmetycznych we wczesno-szkolnej fazie edukacji. Efekty SNARC zostały jedynie potwierdzone eksperymentalnie dla bodźców cyfrowych składających się co najwyżej z trzech cyfr elementarnych (Tlauka, 2002). Wydaje się więc, że podczas operacji dokonywanych na wielo-cyfrowych liczebnikach umysł nie generuje reprezentacji numerycznych ze struktur osiowych. Odczytywanie długich cyfr wymaga posługiwania się przez umysł strukturami będącymi pękami (wiązkami) osi liczbowych (osiami jedności, dziesiątek, setek, itd.). Badania z zakresu antropologii kulturowej pokazują, iż ludzkość posługiwała się różnymi systemami cyfrowymi (Ifrah, 2006, s. 257–258). Cyfry można zapisywać nie tylko liniowo, ale również kolumnowo. Ponadto, nie tylko układ dziesiętny cyfr był używany w dziejach ludzkości. Okazuje się, że można skonstruować teorię, która pozwala na wygenerowanie reprezentacji zarówno cyfrowych jak i werbalnych liczebników, zapisywanych liniowo, ale także kolumnowo. Co więcej, teoria taka rekonstruuje mechanizmy obliczeniowe identyfikowania różnokształtnych liczebników, oszacowywania ich pod względem relacji większości (mniejszości) oraz dodawania (Krysztofiak, 2012a, 2015a). Zdolności rozwiązywania przez dzieci w wieku sześciu lub siedmiu lat niestandardowych zadań z treścią, których teoriomnogościowe modele wymagają zastosowania zbioru pustego oraz względnie skomplikowanych operacji teoriomnogościowych, można wyjaśnić, odwołując się do hipotezy, iż dzieci w trakcie rozwiązywania takich zadań posługują się arytmetyką indeksowanych liczb naturalnych, której modelami są właśnie pęki (wiązki) osi liczbowych.[9] Jeszcze inne badania pokazują, że użytkownicy języka, posiadający niezwykłą biegłość w dodawaniu a nawet mnożeniu bardzo długich cyfr, posługują się reprezentacjami abakusowymi (Frank, Barner, 2012). Można jednak pokazać to, że takie reprezentacje powstają jako modyfikacje reprezentacji przyjmujących kształty pęków (wiązek) osi liczbowych (Krysztofiak, 2016a, s. 10).

[9] Konstrukcja arytmetyki indeksowanych liczb naturalnych (INA) formalizuje ideę, iż liczby naturalne są rozmieszczone na nieskończonej liczbie osi o wspólnym, zerowym początku. W tej arytmetyce można mówić o wielu jedynkach, dwójkach, trójkach, itd. Teoria ta stanowi uogólnienie arytmetyki PA, która powstaje z INA przez dodanie aksjomatu o istnieniu dokładnie jednej osi liczbowej. INA jest teorią drugiego rzędu. Zob. Krysztofiak (2012b). Idea, iż liczebniki zachowują się jak funkcje, a nie jak stałe indywiduowe, pochodzi z pracy (Harman, 1974). W pracy (Rożko, 2015) została przedstawiona analiza porównująca modele osiowe liczb z modelami liczb naturalnych jako wiązek osi liczbowych. Według autorki, model wiązki osi liczb może być potraktowany jako rozszerzenie modelu osiowego.

Wyszczególnione fakty wskazują, że wykonując akty numeryczne, umysł posługuje się reprezentacjami numerycznymi o różnym kształcie: osiami (różnych typów), wiązkami osi i abakusami. To sugeruje, iż mentalne reprezentacje numeryczne są generowane przez umysł w sposób twórczy i kulturowo zapośredniczony. Z drugiej jednak strony, łatwo można pokazać, iż ich rozmaitość tworzy pewną hierarchię. Wskazywałoby to na fakt, iż człowiek rodzi się z wrodzonym repertuarem reprezentacji osiowych, z których następnie – w toku swojego rozwoju poznawczego - generuje bardziej złożone struktury reprezentacyjne pozostające względem siebie w relacjach transformowalności. Z punktu widzenia formalnych modeli, te transformacje mają charakter niezależny od schematów kulturowych – w szczególności od matematycznych metafor pojęciowych. Niestety nie można takiego wniosku potwierdzić eksperymentalnie.

3. Antykulturalizm arytmetyczny w kontekście badań metalogicznych

Stanowisko antykluturalizmu arytmetycznego można próbować bronić odwołując się do faktu istnienia modeli semantycznych arytmetyki PA. Jeśli przyjmie się, że przedmiotem poznania PA są jej modele semantyczne, to skoro nie wykazują one żadnego podobieństwa z metaforami pojęciowymi Lakoffa i Núñeza, to nie można wówczas wyprowadzić wniosku, iż PA stanowi językową ekspresję takich metafor. Błąd kulturalistów arytmetycznych polega na tym, że próbują oni pokazać w „izolacji” to, że aksjomaty PA opisują metaforyczną strukturę drogi. To, że arytmetyczna operacja następnika, może być modelowana jako wskazująca kolejne punkty spoczynku na drodze prowadzącej od źródła do celu w nieskończoność, nie oznacza, że każdy z tych spoczynkowych punktów na drodze od źródła do celu w nieskończoność posiada własności dziedziczne. Innymi słowy, kulturaliści powinni pokazać, że łącznie aksjomaty arytmetyki PA opisują pewien rodzaj metafory pojęciowej. Osie liczbowe kognitywistów mają charakter skończony i nie mogą być potraktowane jako modele semantyczne arytmetyki PA. Z punktu widzenia antykulturalizmu arytmetycznego, należałoby potraktować arytmetykę PA (arytmetykę ekspercką) oraz arytmetyki kognitywne jako całkowicie odmienne teorie. Nasze codzienne operacje obliczeniowe musiałyby być zinterpretowane jako czynności, których zakres aplikacji nie tworzy modeli semantycznych PA. Zdanie „$1 + 2 = 3$” oznaczałoby w modelu którejś z teorii arytmetyki kognitywnej co innego, niż ta sama formuła wyrażona w PA.

Przedstawiona linia argumentacyjna na rzecz antykulturalizmu arytmetycznego motywuje do uznania następującej konstatacji: w systemie edukacji wczesnoszkolnej dzieci nie nabywają kompetencji w zakresie arytmetyki eksperckiej, lecz usprawniają swoje dyspozycje do posługiwania się różnymi arytmetykami kognitywnymi (ludowymi). Jeśli ten wniosek jest poprawny, to wyłania się następujące pytanie: dlaczego dyspozycje do posługiwania się arytmetykami kognitywnymi są warunkiem opanowania kompetencji poznawczych w zakresie arytmetyki PA?

Na postawione pytanie można odpowiedzieć następująco: (i) arytmetyki kognitywne są teoriami rozmaitych systemów cyfrowych (obliczeniowych, liczebnikowych), podczas gdy arytmetyka PA jest teorią modeli liczbowych (standardowych lub niestandardowych); (ii) systemy cyfrowe (obliczeniowe, liczebnikowe) są interpretowalne w modelach liczbowych; (iii) poprzez uzyskanie „biegłości" w operacjach na strukturach cyfrowych (obliczeniowych, liczebnikowych) oraz zinterpretowanie ich jako struktury liczbowe, umysł uzyskuje „biegłość" w operowaniu na strukturach liczbowych (arytmetyki PA), warunkującą dalsze rozwijanie eksperckich kompetencji arytmetycznych.

Obcowanie z systemami cyfrowymi uruchamiałoby więc wyłącznie psychologiczny mechanizm torowania dostępu do struktur liczbowych. Z tego punktu widzenia, teorie systemów cyfrowych mogłyby być potraktowane jako szczególnego rodzaju opisy różnych metafor pojęciowych. Arytmetyki kognitywne stanowiłyby wyłącznie kulturowe narzędzia wzmacniające kontekst przekazu w dyskursie matematyki eksperckiej.[10]

Podstawowym problemem dla obrony stanowiska antykulturalizmu arytmetycznego jest rozwikłanie następujących kwestii: Co jest przedmiotem poznania PA? Czy są nim modele semantyczne PA? Czy są nim dziedziny przedmiotowe tychże modeli? A może przedmiotem poznania arytmetyki PA są fakty matematyczne określone na elementach dziedzin modeli PA? Skoro bowiem arytmetyka nie jest opisem metaforycznych schematów pojęciowych, kodowanych w ludzkim umyśle w wyniku jego interakcji ze środowiskiem zarówno biologicznym jak i kulturowym, to należy rozwikłać kwestię tego, do czego odnoszą twierdzenia teorii arytmetycznych?

Dziedzina modeli arytmetyki PA jest określana jako zbiór wszystkich liczb naturalnych. Przyjmując stanowisko, iż są one przedmiotem poznania arytmetyki PA (zgodnie z dictum Quine'a, iż istnieć znaczy być wartością zmiennej kwantyfikowanej), należałoby jednocześnie przyjąć wniosek, iż poznanie ich w ramach arytmetyki PA ma charakter wieloznaczny z racji niekategoryczności arytmetyki PA. Skoro bowiem arytmetyka PA posiada nieizomorficzne modele semantyczne, to należy wnioskować, iż w każdym z takich nieizomorficznych modeli liczby naturalne uwikłane są w różniące się struktury formalne (teoriomnogościowe). Twierdzenia arytmetyczne opisywałyby w ten sam sposób różniące się struktury w różnych nieizomorficznych modelach. Ujednoznacznienie arytmetyki PA musiałoby sprowadzać się do czynności interpretacyjnej, relatywizującej liczby naturalne do określonego modelu semantycznego. Wówczas nie można by mówić, iż przedmiotem poznania arytmetyki PA są liczby naturalne, ale są nim liczby naturalne w modelu M. To zaś równałoby się stwierdzeniu, że przedmiotami poznania arytmetycznego są układy o postaci: $< M_i, N >$. Kwestia identyczności dziedziny N w uniwersum wszystkich układów typu: $< M_i, N >$, pozostawałaby nadal otwarta. Czy N w $< M_i, N >$ jest tym samym, co N w $< Mk, N >$, gdzie M_i oraz M_k są nieizomorficzne?

Określenie przedmiotu poznania arytmetyki PA jako faktów arytmetycznych zachodzących w jej modelach prowadzi do wniosku, iż faktów takich nie da się opisać w języku przedmiotowym PA, a co najwyżej – w metajęzyku PA. Ugruntowanie arytmetyki PA na klasycznej logice predykatów wzbogaconej o operator identyczności międzyzdaniowej oraz o regułę lambda-konwersji umożliwia skon-

[10] Pojęcie kontekstu przekazu matematycznego zostało wprowadzone w pracy Pogonowski (2016).

struowanie dowodów Slingshot i Hiper-Slingshot (skonstruowane w pracy Krysztofiak (2011), (2015b)). Pierwsze z nich pokazują, że wszystkie prawdziwe zdania arytmetyki PA denotują ten sam fakt arytmetyczny, zaś dowody Hiper-Slingshot pokazują, że dwa zdania, które stwierdzają działanie dwóch różnych funkcji na dwa różne argumenty, muszą być uznane za denotujące ten sam fakt arytmetyczny. Dowody Hiper-Slingshot nie spełniają więc zasady Barwise'a – Perry'ego, która wyraża to, że jeśli dwa fakty ufundowane (lub zbudowane) są z różnych składników, to fakty te są różne.[11] Choć w języku przedmiotowym arytmetyki PA, istnienie faktów arytmetycznych jest niewyrażalne, to jednak można by próbować bronić stanowiska, iż takie fakty arytmetyczne można opisywać w metateoriach ontologiczno-arytmetycznych. [12] Taka konsekwencja rodzi inny trudny problem: dlaczego jest tak, że fakty arytmetyczne można opisywać na gruncie metateorii ontologiczno-arytmetycznej, mimo, że są „niewidzialne" z punktu widzenia teorii PA?

Inna próba określenia przedmiotu poznania arytmetyki PA mogłaby polegać na stwierdzeniu, iż jest nim klasa wszystkich modeli semantycznych, w których arytmetyka PA jest prawdziwa. Klasa modeli arytmetyki PA zawiera jednak modele nieizomorficzne względem siebie. Wiadomo jednak, ile jest w klasie wszystkich modeli PA zawartych klas abstrakcji z uwagi na relacje izomorfizmu pomiędzy modelami dla każdej nieskończonej liczności dziedzin tych modeli. [13] Gdyby udało się pokazać, że każde dwa nieizomorficzne modele są transformowalne jeden na drugi z uwagi na określone morfizmy, to wówczas przedmiot poznania arytmetyki PA można by próbować ująć jako przestrzeń wszystkich modeli semantycznych wraz z klasą wszystkich takich transformacji (morfizmów) określonych na tych modelach. Z takiego punktu widzenia, operacje transformowania się modeli PA nie byłyby podatne na opis wewnątrz samej PA. Byłyby one „widzialne" dopiero z punktu widzenia teorii mnogości. Taka strategia konceptualizowania przedmiotu poznania arytmetyki PA przypomina podejście G?dla (kontynuowane w Arystotelesowskiej modyfikacji przez Hellera), zgodnie z którym istnieje jedno platońskie

[11] Na gruncie arytmetyki PA wzbogaconej o regułę lambda-konwersji (stanowiącą niekontrowersyjne narzędzie matematyczne) oraz o aksjomat logiki niefregowskiej: $\alpha \bullet \alpha$, stwierdzający, iż fakt to, że α, jest identyczny z samym sobą, można udowodnić, na przykład, zdanie o postaci: $[(\lambda x)[x+1](2) = 3] \bullet [(\lambda x)[2+x](1) = 3]$. Lewa strona tego zdania wyraża to, że funkcja $(\lambda x)[x+1]$ zastosowana do argumentu będącego liczbą 2 przyjmuje wartość w postaci liczby 3. Prawa strona zaś wyraża to, że funkcja $(\lambda x)[2+x]$ zastosowana do liczby 1 przyjmuje liczbę 3 jako swoją wartość. Okazuje się, że $(\lambda x)[x+1] \neq (\lambda x)[2+x]$ oraz $2 \neq 1$. Zatem zgodnie z zasadą Barwise'a – Perry'ego, prawda jest, że $\sim [(\lambda x)[x+1](2) = 3] \bullet [(\lambda x)[2+x](1) = 3]$. Podstawowa zasad konstrukcji semantyki i ontologii sytuacyjnej Barwise'a i Perry'ego została nie wprost wyrażona w pracach: (Barwise, Perry, 1981, s. 387-403; Barwise, Perry, 1983, s. 24-26).

[12] W pracy (Krysztofiak, 2014) sklasyfikowano uniwersum „arytmetyk faktowych" liczb naturalnych ugruntowanych wyłącznie na niefergowskich rachunkach zdaniowych. Można wyróżnić 63 takie teorie „arytmetyki faktowej".

[13] Badania nad liczebnościami modeli niestandardowych teorii pierwszego rzędu zapoczątkował Morley i kontynuował Shelah. Dla każdej nieskończonej mocy dziedziny modelu teorii pierwszego rzędu k, liczba nieizomorficznych klas modeli wynosi 2k. Wyniki Shelaha w ramach teorii modeli pokazują, że dla arytmetyki PA tych nieizomorficznych klas modeli jest co najmniej continuum. Wydaje się, że ten wynik przekreśla możliwość odkrycia jakichś uniwersalnych transformacji nieizomorficznych modeli na siebie. Niniejsza uwaga jest inspirowana zaleceniami anonimowego recenzenta prezentowanego artykułu. Na temat klasyfikacji modeli semantycznych teorii pierwszego rzędu z dziedzinami pozaskończonymi, zob. Shelah (1990).

uniwersum matematyczne, którym jest przestrzeń wszystkich zbiorów (klas), ich własności oraz funkcji określonych na tych zbiorach, własnościach i funkcjach.

Obecny etap rozwoju teorii mnogości, a także teorii arytmetycznych, pozwala zasadnie przyjąć meta-hipotezę, iż obecna matematyka znajduje się obecnie w jakimś początkowym okresie swojego rozwoju. Do czasów Cantora, Dedekinda i Peano, uprawiano jedynie zręby arytmetyki, często myląc ją z teoriami konstruującymi i rozwijającymi hindusko-arabski system cyfrowy. Dopiero pokazanie tego, że arytmetykę PA można zinterpretować jako teorię szczególnego rodzaju struktur teoriomnogościowych i w konsekwencji opracowanie teoriomnogościowych metod konstrukcji liczb całkowitych, liczb wymiernych oraz liczb rzeczywistych z liczb naturalnych (rozumianych jako klasy równoliczności skończonych zbiorów lub elementy określonego typu ciągów konstruowanych przy pomocy zbioru pustego oraz operatora tworzenia zbiorów) w pewien sposób uzasadnia hipotezę, iż przedmiotem poznania arytmetyki nie są ani cyfry (liczebniki), ani ich systemy, ale struktury teoriomnogościowe szczególnego świata platońskiego. Problem, jaki się jednak wyłania, dotyczy tego, czy taki świat platoński wszystkich struktur teoriomnogościowych jest jeden czy jest takich światów wiele?

Teoria ZFC jest niezupełna. W związku z tym, dodając do niej nowe aksjomaty, konstruuje się nowe teorie mnogości będące jej rozszerzeniami, ale które również posiadają status teorii niezupełnych, a więc rozszerzalnych. Teorie takie, o ile są niesprzeczne, wyznaczają pewne światy struktur ekstensjonalnych. Na przykład, teoria mnogości z aksjomatem ufundowania wyklucza to, że w uniwersum zbiorów może pojawić się teoriomnogościowe „zjawisko zapętlenia się zbiorów”. Kiedy odejmiemy od takiej teorii aksjomat ufundowania, otrzymujemy teorię hiperzbiorów, opisującą światy w których zjawisko zapętlenia się zbiorów jest dopuszczalne.

ZFC można również potraktować jako teorię zbiorów w wysokim stopniu idealizacyjną, czyli pomijającą inne ważne parametry charakteryzujące zbiory. ZFC bada wyłącznie zbiory, dla których istnieje binarna funkcja charakterystyczna (w aspekcie należenia lub nienależenia elementu do dowolnego zbioru). Można jednak rozszerzyć (za Zadehem) funkcję charakterystyczną zbiorów tak, aby przyjmowała ona wartości z przedziału liczb rzeczywistych [0, 1]. W ten sposób przynależność elementu do zbioru można ujmować jako relację stopniowalną. Czy teorie mnogości zbiorów rozmytych mogą stanowić podstawę dla skonstruowania arytmetyki rozmytych liczb naturalnych? Czym wówczas byłaby rozmyta liczba jeden lub rozmyte liczby: dwa, trzy, itd.?[14] Innym parametrem zbiorów jest krotność należenia elementu do zbioru. Skonstruowano teorię mnogości zbiorów z powtórzeniami. Zgodnie z taką teorią można sensownie mówić, iż dany element n-krotnie należy do danego zbioru. ZFC jest teorią zbiorów, do których należą ich elementy tylko jednokrotnie. Liczność zbioru $\{x, x, y\}$ jest różna od liczby kardynalnej zbioru $\{x, y\}$, gdyż do pierwszego zbioru x należy dwa razy, a do drugiego zbioru tylko jeden raz. Czy można by skonstruować arytmetykę „powtórzonych liczb natural-

[14] W pracy (Jarmoc, 2017), autor pokazuje, że użytkownicy języka posługują się w swoich codziennych operacjach liczebnikami typu: „około 2”. „około 3”, „około 4”, itd. Takie liczebniki można by interpretować jako odnoszące się do rozmytych liczb naturalnych. Niestety nie skonstruowano dotychczas takiej teorii. Autor przedstawia program formalizacji takich struktur przy pomocy niestandardowych modeli arytmetyki PA. Wydaje się jednak, że lepszym narzędziem byłyby modele arytmetyczne konstruowane na gruncie teorii zbiorów rozmytych.

nych”? Liczność zbioru trójelementowego bez powtórzeń jest czymś innym, niż liczność zbioru trójelementowego z powtórzeniem dwukrotnym jednego z elementów. Czy skończonym licznościom z powtórzeniami odpowiadałyby więc jakieś innego rodzaju liczby naturalne, niż te które odpowiadają skończonym licznościom bez powtórzeń? Obok krotności oraz stopnia należenia, można mówić o trzecim parametrze charakteryzującym relację należenia – mianowicie o stopniach dwóch typów zapętlenia tejże relacji. Inny jest stopień zapętlenia relacji należenia w takiej oto sytuacji: $x \in y$, $y \in z$, $z \in x$, niż w sytuacji: $x \in y$, $y \in z$, $z \in t$, $t \in x$. W pierwszej sytuacji, z jest zapętlony z x bezpośrednio, ale w drugiej pośrednio. Co więcej, w pierwszej sytuacji x jest zapętlony z y bezpośrednio, podczas gdy y jest zapętlony z x pośrednio. Mamy więc dwa rodzaje zapętlenia: z punktu widzenia obiektu „pętlącego” oraz z punktu widzenia obiektu „pętlonego”. W ZFC nawet bez aksjomatu ufundowania abstrahuje się od takich właściwości relacji należenia, które można określić stopniem jej zapętlenia.

Zunifikowana teoria mnogości (UST - *unified set theory*), której aksjomaty będą charakteryzowały relację należenia z uwagi na parametry: stopnia należenia, krotności należenia oraz stopni zapętlenia, będzie wyznaczała całkowicie odmienne uniwersum struktur teoriomnogościowych, niż teoria mnogości ZFC lub jej rozmaite rozszerzenia. Jaki kształt wówczas przyjmie redukcja arytmetyki PA do UST? Czy UST okaże się teorią pozwalającą skonstruować jakieś nowe rodzaje liczb? Jeśli tak, to w jakich relacjach teoriomnogościowych (na gruncie UST) te nowe rodzaje liczb będą pozostawały względem „starych liczb naturalnych”?

4. Zakończenie

Trudno jest przedstawić argumenty na rzecz tezy, że teorie arytmetyczne opisują metaforyczne schematy pojęciowe, które podmiot ludzki wytwarza w swoich interakcjach zarówno ze środowiskiem naturalnym jak i kulturowo-społecznym. Trudno jest również przedstawić argumenty na rzecz tezy, iż skoro przedmiotem poznania teorii arytmetycznych jest jakieś jednolite uniwersum matematyczne (platońskie lub struktura matematyczna wszechświata fizycznego), to z racji istnienia osobliwego przedmiotu poznania teorii arytmetycznych, ekspercka kompetencja matematyczna nie jest determinowana kulturowo w kontekście uzasadniania. Nie wiemy bowiem czym jest jakiś transcendentny przedmiot poznania matematycznego. Tym bardziej, że nie wiemy tego, w jakim stopniu obecnie konstruowane teorie mnogości jako rozszerzenia ZFC są idealizacjami domniemanego uniwersum teoriomnogościowego.

Spoglądając na współczesny stan rozwoju matematyki można stwierdzić, że matematycy tworzą w językach formalnych swoje narracje, poddają je metalogicznym badaniom, przekładają je na zapisy cyfrowe i stosują do modelowania rozmaitych fragmentów światów doświadczanych przez ludzi. Bez wątpienia matematycy tworzą, podobnie jak twórcy literatury pięknej, pewne światy przedstawione zamieszkałe przez matematycznych, abstrakcyjnych bohaterów – opisywanych przy pomocy wyrażeń języka formalnego oraz cyfrowego. Ponieważ te intencjonalne światy mają charakter idealizacyjny (schematyczny), w związku z tym są pod wieloma względami niedookreślone w sensie Ingardena (koncepcja broniona w (Błaszczyk, 2007)). Kreacja takich światów matematyki dokonuje się jednak wedle ściśle określonych reguł metamatematycznych (przede wszystkim rekurencyjnych reguł dowodzenia). To zaś czyni teorie matematyki eksperckiej autonomicznymi względem teorii matematyki ludowej. Ta druga rozwija się bowiem jako teoria systemów cyfrowych, służących do opisu przeróżnych schematów pojęciowych (metafor kognitywnych), za pomocą których dokonujemy codziennych aktów referencji numerycznej.

Kwestia czy intencjonalne światy „eksperckiej literatury matematycznej" odwzorowują jakieś uniwersum domniemanej, zunifikowanej teorii mnogości UST, jest obecnie otwarta. Jeśli UST nie istnieje, to nie ma jednego, transcendentnego i transcendentalnego świata struktur liczbowych – wówczas trzeba zadowolić się wielością światów intencjonalnych matematyki. Dodać trzeba, że nie zrobiliśmy dotychczas nawet małego kroku w poszukiwaniu UST. Dlatego też dyskurs filozoficzny, w którym mówi się o takim jednolitym, jednym świecie struktur matematycznych, należy traktować jako dogmatyczny i służący bardziej potrzebom teologicznym (ugruntowywania istnienia stwórcy matematyki przez duże M), aniżeli pedagogicznym. Jeśli w szkołach uczniów trzeba uczyć sprawnego posługiwania się najróżniejszymi systemami i strukturami liczebnikowymi, to wówczas dla realizacji takiego celu nie jest potrzebna wiara w jeden transcendentalny świat struktur matematycznych i jego „domniemanego literacko" stwórcę. Wówczas lepszymi narzędziami pobudzającymi nasze kompetencje w zakresie arytmetyki ludowej będą metafory pojęciowe kognitywistów.

References

Ashcraft, M. H.: 1992, Cognitive arithmetic: A review of data and theory, *Cognition* **44**, 75–106.

Barwise, J., Perry, J.: 1981, Semantic Innocence and Uncompromising Situations, *Midwest Studies in Philosophy* **6**, 387–403.

Barwise, J., Perry, J.: 1983, *Situations and Attitudes*, The MIT Press: Cambridge, Mass.: London.

Berch, D. B.: 2005, Making Sense of Number Sense: Implications for Children With Mathematical Disabilities, *Journal of Learning Disabilities* **38**(4), 333–339.

Bernstein, B.: 1990, *Odtwarzanie kultury*, (tłum. Z. Bokszański, A. Piotrowski), Państwowy Instytut Wydawniczy, Warszawa.

Błaszczyk, P.: 2007, *Analiza filozoficzna rozprawy Richarda Dedekinda „Stetigkeit und irrationale Zahlen"*, Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej w Krakowie, Kraków.

Cotton, T., T., H.: 2004, Problematic Culture and Dioscourse for Mathematics Education Research, w: P. Valero, R. Zevenbergen (red.), *Researching the socio-political dimensions of mathematics education: Issues of power in theory and methodology*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 85–103.

Dehaene, S.: 2001, Precis of The Number Sense, *Mind & Language* **16**(1), 16–36.

Dehaene, S., Bossini, S., Giraux, P.: 1993, The Mental Representation of Parity and Number Magnitude, *Journal of Experimental Psychology: General* **122**(3), 371–396.

Frank, M. C., Barner, D.: 2012, Representing Exact Number Visually Using Mental Abacus, *Journal of Experimental Psychology: General* **141**(1), 134–149.

Galton, F.: 1880, Visualised numerals, *Nature* **21**, 252–256.

Giaquinto, M.: 2001, Knowing Numbers, *The Journal of Philosophy* **98**(1), 5–18.

Harman, G.: 1974, Identifying Numbers, *Analysis* **35**(1), 12.

Heller, M.: 2006, Czy świat jest matematyczny?, w: M. Heller (red.), *Filozofia i wszechświat*, Universitas, Kraków, 48–57.

Heller, M.: 2010, Co to znaczy, że przyroda jest matematyczna?, w: M. Heller, J. Życiński (red.), *Matematyczność przyrody*, Petrus, Kraków, 7–18.

Hohol, M.: 2011, Matematyczność ucieleśniona, w: B. Brożek, J. Mączka, W. P. Grygiel, M. Hohol (red.), *Oblicza racjonalności: wokół myśli Michała Hellera*, Copernicus Center Press, Kraków, 143–166.

Ifrah, G.: 2006, *Historia powszechna cyfr,* t.1, Wydawnictwo W.A.B, Warszawa.

Jarmoc, M.: 2017, Wykorzystanie niestandardowych struktur arytmetycznych w modelowaniu kognitywistycznym myślenia numerycznego, *Rocznik Kognitywistyczny* **10**, 1–14.

Krysztofiak, W.: 2011, Fakty matematyczne w świetle logiki niefregowskiej, *Filozofia Nauki* **19**(76), 83–101.

Krysztofiak, W.: 2012a, Logiczna składnia liczebnika. Studium kognitywistyczne. Część I, *Filozofia Nauki* **20**(77), 59–91.

Krysztofiak, W.: 2012b, Indexed Natural Numbers in Mind: A Formal Model of the Basic Mature Number Competence, *Axiomathes* **22**, 433–456.

Krysztofiak, W.: 2014, Do We Need Mathematical Facts?, *History and Philosophy of Logic* **31**(1), 76–107.

Krysztofiak, W.: 2015a, Logiczna skladnia liczebnika. Część II: Formatowanie i przetwarzanie liczebnikowych struktur głębokich, *Filozofia nauki* **23**(91), 21–55.

Krysztofiak, W.: 2015b, Hyper-Slingshot. Is Fact-Arithmetic Possible? , *Foundations of Science* **20**, 59–76.

Krysztofiak, W.: 2016a, Representational Structures of Arithmetical Thinking: Part I, *Axiomathes* **26**, 1–40.

Krysztofiak, W.: 2016b, Algebraic Models of Number Axes: Part II, *Axiomathes* **26**, 123–155.

Lakoff, G., Núñez, R. E.: 2000, *Where Mathematics Comes From. How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York.

Murawski, R.: 1995, *Filozofia matematyki. Zarys dziejów*, PWN, Warszawa.

Núñez, R. E.: 2000, *Mathematical Idea Analysis: What Embodied Cognitive Science Can Say about the Human Nature of Mathematics*, Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)(24th, Hiroshima, Japan, July 23-27, 2000), U.S. Department of Education: The Educational Resources Information Center.

Núñez, R. E.: 2011, No Innate Number Line in the Human Brain, *Journal of Cross-Cultural Psychology* **42**, 651–668.

Nuerk, H. C., Wood, G., Willmes, K.: 2005, The universal SNARC effect. The association between number magnitude and space is amodal, *Experimental Psychology* **52**, 187–194.

Patro, K., Haman, M.: 2012, The spatial-numerical congruity effect in preschoolers, *Journal of Experimental Child Psychology* **111**, 534–542.

Patro, K., Krysztofiak, W.: 2013, Umysłowe osie liczbowe. Efekt SNARC. Aspekty filozoficzne, *Filozofia Nauki* **21**(83), 45–98.

Pogonowski, J.: 2011, Geneza matematyki wedle kognitywistów, *Investigationes Linguisticae* **23**, 106–147.

Pogonowski, J.: 2016, Kontekst przekazu w matematyce, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **8**, 119–137.

Pogonowski, J.: 2017, On Conceptual Metaphors in Mathematics, *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia* **9**, 85–98.

Roggeman, C., Verguts, T., Fias, W.: 2007, Priming reveals differential coding of symbolic and nonsymbolic quantities, *Cognition* **105**, 380–394.

Rożko, M.: 2015, Dwa modele reprezentacji liczb. Umysłowa os liczbowa oraz umysłowa wiązka osi liczbowych, *Filozofia Nauki* **23**(90), 107–122.

Shelah, S.: 1990, *Classification Theory and The Number of Non-isomorphic Models, (revisited edition)*, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam.

Tlauka, M.: 2002, The processing of numbers in choice-reaction tasks, *Australian Journal of Psychology* **54**, 94–98.

Wójtowicz, K.: 2003, *Spór o istnienie w matematyce*, Wydawnictwo Naukowe Semper, Warszawa.

Zebian, S.: 2005, Linkages between number concepts, spatial thinking, and directionality of writing: The SNARC effect and the REVERSE SNARC effect in English and Arabic Monoliterates, Biliterates, and Illiterate Arabic Speakers, *Journal of Cognition and Culture* **5**, 165–190.

Uniwersytet Szczeciński
Wydział Humanistyczny
Instytut Filozofii
ul. Krakowska 71-79
PL-71-017 Szczecin
e-mail: wojciech.krysztofiak@gmail.com